Mink's Leitfaden

der

analytischen Geometrie

der

Ebene und des Raumes

für den

Unterricht an höheren Lehranstalten.

Zweite Auflage
vollständig umgearbeitet und erweitert

von

Dr. Ernst W. Fiedler
Professor an der Kantonsschule, Privatdocent am eidg. Polytechnikum in Zürich.

Mit 40 Holzschnitten im Text.

Berlin 1889.

Nicolaische Verlags-Buchhandlung
R. Stricker.

Vorwort.

Der vorliegende „Leitfaden“ vertritt die Stelle einer zweiten Auflage des „Lehrbuch der analytischen Geometrie und Kegelschnitte“, welches Oberlehrer Wilhelm Mink 1878 als „Leitfaden beim Unterrichte an höheren Lehranstalten“ veröffentlichte. Nach dem Tode des Verfassers übertrug mir die Verlags-Buchhandlung die Neubearbeitung und zwar mit voller Freiheit bezüglich des Textes. Wenn nun aus dem alten ein ganz neues Buch geworden ist, so habe ich doch gesucht, die Grundgedanken Mink's sorgfältig zu erhalten und weiterzuführen.

Den Hauptvorzug der Mink'schen Darstellung erblicke ich darin, dass sie der Lehre von den Kegelschnitten die monofocale Definition zu Grunde legt und auch die stereometrische Herleitung beifügt. Denn es scheint mir für den Zweck der analytischen Geometrie auf der Schulstufe nützlicher, durch eine gemeinsame Definition zu einer bewusst vergleichenden Untersuchung der verschiedenen Formen zweiten Grades anzuleiten, als zuerst ausschliesslich die conventionellen Gleichungsformen, nachher (kurz) die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zu besprechen, wie dies üblich ist. Kann man doch an diesem Beispiel am besten die Unterordnung wesentlich verschiedener geometrischer Gestalten unter dieselbe algebraische Gleichungsform veranschaulichen und ihre allmäligen Übergänge ersichtlich machen.

Nur gehört zu derartiger Entwickelung Übung im Gebrauche und Einsicht in den Nutzen der Coordinatentransformation. Deshalb habe ich sie von Anfang an eingeführt und durchgängig zur Ableitung neuer Ausdrücke herangezogen. Dass ich dagegen die schiefwinkligen Coordinaten nur nebenbei zulasse, ist schon durch die Begrenzung der Zeit geboten.

In der analytischen Raumgeometrie habe ich geglaubt, eine kurze Besprechung der Kugel und besonders des geraden Kreiskegels hinzufügen zu sollen. Sie ist schon dadurch nötig, dass sie

die stereometrische Definition der Kegelschnitte liefert. Und zwar habe ich diese wieder in der einfacheren monofocalen Form entwickelt, wobei die leichte analytische Einkleidung den Wegfall des rein geometrischen Excurses der ersten Auflage nicht empfinden lassen wird. Will man diese Erörterung nicht geradezu als Abschluss des stereometrischen Unterrichtes aufnehmen — was nach meiner Erfahrung gut geht —, so wird zur Überleitung von den Linienpaaren und Kreisen zu den Kegelschnitten auch ihre gemeinsame Auffassung als Örter von Punkten mit constanten Abstandsverhältnissen von zwei festen Elementen genügen.

Möge das Büchlein auch in dieser Form beim Unterrichte an höheren Lehranstalten als Leitfaden dienen können! In gedrängter, aber unter den Hauptgesichtspunkten vollständiger Erörtertung will es dem Schüler den wesentlichen Gedankengang vorführen, die blossen Zahlenbeispiele tunlichst dem Lehrer überlassend. Wenn der Schüler einige über das Notwendigste hinausgehende Entwickelungen findet, so kann es nur anregend wirken, wenn er sich vorbereitet sieht, sie selbständig durchzuarbeiten. Paragraphen, welche im Unterricht am ehesten entbehrlich sind, habe ich mit Sternchen bezeichnet. Für jeden Verbesserungsvorschlag werde ich dankbar sein.

Zürich-Riesbach, 1889.

Prof. Dr. Ernst Fiedler.

Inhaltsverzeichnis.

A. Analytische Geometrie der Ebene.

I. Die Coordinaten des Punktes.

II. Die Gerade.

III. Der Kreis.

IV. Die Parabel.

V. Die Ellipse.

VI. Die Hyperbel.

VII. Übersicht der Kegelschnitte.

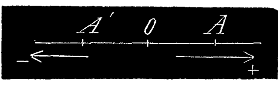
B. Analytische Geometrie des Raumes.

I. Punkte und Richtungen.

A. Analytische Geometrie der Ebene.

I. Die Coordinaten des Punktes.

§ 1. Um in einer gegebenen Geraden die Lage irgend eines Punktes A zu bestimmen, wird man den Weg angeben, auf welchem man von einem fest gewählten Punkte O der Geraden nach A gelangt, d. h. die Strecke OA. Dabei unterscheiden sich zwei um gleiche Längen von O nach verschiedenen Seiten entfernte Punkte A, A' dadurch, dass die zu ihnen führenden Wege OA, OA' in entgegengesetztem Bewegungssinn durchlaufen werden. Die Endpunkte aller in O anfangenden Strecken gleichen Sinnes liegen auf demselben Halbstrahl der Geraden.



Die Länge der Strecke OA kann nun durch eine absolute Zahl bestimmt werden, sobald eine Längeneinheit OE (z. B. 1 cm) zu ihrer Messung fixirt ist. Der Sinn der Strecke OA kann durch Beifügung des positiven oder negativen Vorzeichens zu jener Masszahl ausgedrückt werden, sobald festgesetzt ist, dass der eine Bewegungssinn in der Geraden (z. B. nach rechts) als positiv, somit der entgegengesetzte (z. B. nach links) als negativ gelten soll. Liegt also A um a Einheiten nach der positiven Seite, so ist der symmetrische Punkt A' durch $-a$ anzugeben.

So bestimmt jede reelle algebraische Zahl x einen Punkt der Geraden, sobald der Nullpunkt O, die Längeneinheit OE und der positive Sinn bekannt ist; die Gerade wird dann als Axe der Streckenmessung bezeichnet, ihre Halbstrahlen werden als positive und negative Axe unterschieden.

§ 2. Nach diesen Festsetzungen kann man über die gegenseitige Lage von zwei Punkten A, B allgemeingültig urteilen, wenn man die Masszahlen x_1 und x_2 der Strecken OA und OB kennt. Für eine positive Strecke AB der positiven Axe ist offenbar $AB = OB - OA$, ihre Masszahl $x_2 - x_1$ also positiv. Dasselbe ergibt sich aber auch, wenn A und B zu beiden Seiten von O oder beide auf der negativen Axe liegen. Umgekehrt ist in diesen durch die Figur veranschaulichten Fällen die Masszahl $x_1 - x_2$ von BA negativ.

Also ist die Differenz $x_2 - x_1$ die Masszahl einer Strecke AB, welche Länge und Sinn derselben richtig angibt, wie auch O liege. Die Zahl $x_2 - x_1$ gibt die Lage von B gegen A auf dieselbe Weise an,

wie x_2 die Lage von B gegen O. Ist M die Mitte von AB, so ist ebenso allgemein $x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ die Masszahl von OM, denn es ist $AM = MB$ oder $x_m - x_1 = x_2 - x_m$.

§ 3*. Zur Bestimmung eines Punktes in der gegebenen Axe kann die Zahl x entweder unmittelbar oder als reelle Wurzel einer vorgelegten Gleichung gegeben sein. Um eine unbenannte reelle Zahl x aber geometrisch als eine Strecke zu deuten, muss sie als Factor der Längeneinheit beigesetzt gedacht werden. Ebenso bedeutet $OA = a$ eigentlich OA gleich a Einheiten.

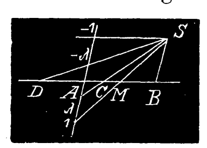
Jede Gleichung zwischen x und bekannten Zahlen enthält eine Rechnungsvorschrift, die auf dieselbe Art in eine planimetrische Construction umgesetzt werden kann. So kann eine Proportion, z. B. $a:b = c:x$, nach der Ähnlichkeitslehre construirt werden, wenn a, b, c, x als Masszahlen von vier Strecken gedeutet werden. Wird sie als Gleichung ersten Grades $ax = bc$ oder $ax = d$ geschrieben, so kann neben a, x nicht auch d Masszahl einer Strecke, sondern muss Masszahl einer Fläche sein. Dasselbe gilt auch für die Proportion $b:x = x:c$ oder die Gleichung $x^2 = bc$ oder $x^2 = d$.

Behufs geometrischer Deutung müssen also die Glieder einer Gleichung Masszahlen von geometrisch gleichartigen Grössen sein. Ist dagegen die Deutung der einzelnen Zahl schon vorgeschrieben, so muss durch Beifügung von Factoren Eins jene Gleichartigkeit hergestellt werden. Soll z. B. d Masszahl einer Länge sein, so muss zu d der Factor 1 als Masszahl der Längeneinheit hinzugefügt werden. Die Gleichung $x^2 = 1 \,.\, d$ verlangt dann die Inhaltsgleichheit eines Quadrates von x cm Seite mit einem Rechteck von den Seiten 1 cm und d cm.

§ 4. Ein zwischen A und B gelegener Punkt C teilt die Strecke AB so, dass die Teilstrecken AC und CB ein bestimmtes Verhältnis haben $AC:CB = \lambda$. Dieses Teilverhältnis ist für $OC = x$

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \text{ also } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Die erste Formel gibt aber negative Werte für λ, sobald AC, CB nicht mehr gleichen Sinnes sind, C also ausserhalb der Strecke AB liegt. Also wird die Strecke durch einen inneren Teilpunkt in einem positiven, durch einen äusseren in einem negativen Verhältnis geteilt.



Die unbenannte Zahl λ kann jeden beliebigen Wert erhalten. Denn trägt man von B aus die Einheit, von A aus das λfache derselben auf beliebige Parallelen ab, so liefert bekanntlich die Verbindung der Endpunkte den zu λ gehörigen Teilpunkt. So gehört als Teilpunkt zu $\lambda = 0$ der Anfangspunkt A, zu $\lambda = 1$ die Mitte M, zu $\lambda = \infty$ der Endpunkt B, zu negativem λ äussere Punkte. Nur zu $\lambda = -1$ findet sich kein endlicher Teilpunkt, denn die Formel liefert $x = \infty$, die Construction den Schnittpunkt der Axe mit einer Parallelen zu ihr. Man sagt daher, zu diesem Teilverhältnis gehöre der unendlich ferne Punkt der Geraden, der ihre Richtung heisst.

§ 5. Es gehören stets ein innerer Teilpunkt C und ein äusserer D zusammen, welche die Strecke AB in Verhältnissen $+\lambda$ und $-\lambda$ teilen, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Dann besteht die Proportion

$AC:CB = -AD:DB$, aber auch $CA:AD = -CB:BD$. Letztere Form sagt aus, dass A und B auch die Strecke CD in entgegengesetzt gleichen Verhältnissen teilen. Man sagt nun: C und D sind harmonische Teilpunkte von AB, A und B also auch harmonische Teilpunkte von CD, oder die Punktepaare A, B und C, D sind in Bezug auf einander harmonisch, trennen einander harmonisch.

Zu jedem Teilpunkt C von AB ist der harmonische D bestimmt; es ist nämlich für $OA = x_1$, $OB = x_2$

$$OC = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad OD = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}.$$

Also gehört zur Mitte M von AB als harmonischer Teilpunkt der unendlich ferne Punkt $\lambda = -1$.

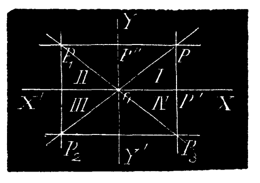
Nun berechnet man aber nach § 2

$$MC = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} - \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \cdot \frac{x_1 - x_2}{2}, \text{ ebenso } MD = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \cdot \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Also ist $$MC \,.\, MD = \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 = MA^2 = MB^2,$$

d. h.: das Product der Abstände harmonischer Teilpunkte C, D von der Mitte M der geteilten Strecke AB ist gleich dem Quadrate der halben Strecke. Daher liegen C, D stets auf derselben Seite von M und nähern sich gleichzeitig demselben Endpunkte A oder B.

§ 6. Es sei nun die Lage eines beliebigen Punktes P der Ebene durch Zahlen zu bestimmen. Man denke sich in der Ebene zwei zu einander normale Axen $X'X$ und $Y'Y$ gegeben, ihren Schnittpunkt O als gemeinsamen Nullpunkt, die Einheit für beide gleich genommen. Fällt man dann von P aus die Normalen auf die Axen und nennt ihre Fusspunkte P' und P'' die Projectionen des Punktes P, OP' und OP'' die Projectionen der Strecke OP auf die Axen, so hat man nur diese Punkte P' und P'' durch die beiden Masszahlen von OP' und OP'' anzugeben. Denn mit ihnen ist zugleich P festgelegt als vierte Ecke des durch O, P', P'' bestimmten Rechtecks. Daher führen von O nach P zwei gebrochene Wege, der eine aus OP' und $P'P = OP''$ gebildet, der andere aus OP'' und $P''P = OP'$.



Die Masszahlen der Projectionen OP' und OP'' der Strecke OP heissen die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P. Zur Unterscheidung wird erstere als Abscisse x und letztere als Ordinate y bezeichnet. Die Axen heissen Coordinatenaxen und zwar $X'X$ Abscissenaxe oder x-Axe, $Y'Y$ Ordinatenaxe oder y-Axe. Die Festsetzung des positiven Sinnes kann in beiden Axen willkürlich geschehen. Doch sei weiterhin die obere Halbaxe der Ordinaten als positiv gewählt, wenn sich die positve Halbaxe der Abscissen vom Beschauer nach rechts erstreckt.

§ 7. Das Axenkreuz zerlegt die Ebene in vier Quadranten. Alle Punkte desselben Quadranten haben für gleichnamige Coordinaten gleiche Vorzeichen, nämlich positive x, positive y im I. Quadranten; negative x, positive y im II.; negative x, negative y im III., positive x, negative y im IV. Je vier Punkte, deren Coordinaten sich nur in den

Vorzeichen unterscheiden, bilden ein in Bezug auf die Axen *symmetrisches* Rechteck, wie $P P_1 P_2 P_3$. Einen Punkt von der Abscisse $x = a$ und der Ordinate $y = b$ pflegt man *abkürzend* durch das Wertepaar $a \mid b$ anzudeuten. Ist daher $OP' = a$, $OP'' = b$, so sind zu unterscheiden: $P: + a \mid + b$; $P_1: - a \mid + b$; $P_2: - a \mid - b$; $P_3: + a \mid - b$.

Jeder Punkt der Abscissenaxe hat die Ordinate $y = o$, jeder Punkt der Ordinatenaxe die Abscisse $x = 0$, z. B. $P': + a \mid 0$; $P'': 0 \mid b$; $O: 0 \mid 0$ (Nullpunkt). Alle Punkte derselben Parallelen zur Abscissenaxe haben die gleiche Ordinate, z. B. $y = b$ in $P_1 P$, $y = - b$ in $P_2 P_3$; alle Punkte derselben Parallelen zur Ordinatenaxe haben die gleiche Abscisse, z. B. $x = a$ in $P_3 P$, $x = - a$ in $P_2 P_1$. Jede einzelne der beiden Coordinaten von P bestimmt daher eine *Axenparallele*, auf welcher P liegt.

§ 8. Auch der directe Weg OP vom Nullpunkt O zum Punkte P hin kann zur Bestimmung des letzteren dienen. Dazu muss man ausser der *absoluten* Länge der Strecke OP nur die Lage des sie enthaltenden *Halbstrahls* gegen die Axen angeben. Und zwar müssen die vier Halbstrahlen OP, OP_1, OP_2, OP_3, welche mit den Axen Winkel von gleicher absoluter Grösse bilden, zu unterscheiden sein. Man erreicht dies, wenn man erstens als den *Neigungswinkel* des Halbstrahls OP den mit der *positiven* Halbaxe der Abscissen gebildeten Winkel $\varphi = \sphericalangle XOP$ bezeichnet und zweitens den *Drehungssinn* beachtet, in welchem derselbe von der Anfangslage OX zur Endlage OP von einem sich um O drehenden Strahle durchlaufen wird.

Es ist nun üblich, jeder Drehung in der Ebene den *positiven* oder den negativen Sinn zuzuschreiben, je nachdem sie *gegen* den Uhrzeiger oder mit demselben erfolgt, *links*- oder rechtsläufig ist. Winkel von verschiedenem Sinne erhalten dann entgegengesetzte Vorzeichen vor ihren *Masszahlen*, so dass $\sphericalangle XOP_3 = - \sphericalangle XOP$, $\sphericalangle XOP_2 = - \sphericalangle XOP_1$ wird. Alsdann ist wiederum der Winkel zweier Halbstrahlen OP, OQ mit dem richtigen Sinn gleich der Differenz der positiven Neigungswinkel des End- und Anfangsschenkels, z. B. $\sphericalangle POQ = \sphericalangle XOQ - \sphericalangle XOP$, $\sphericalangle P_3OQ = \sphericalangle XOQ - \sphericalangle XOP_3 = \sphericalangle XOQ + \sphericalangle XOP$. Demnach ist auch der Winkel zweier Geraden zu definiren als der Winkel der auf denselben angenommenen positiven Halbstrahlen, gemessen vom Anfangs- zum Endschenkel. So ist die Festsetzung des § 6 über den positiven Sinn in der Ordinatenaxe gleichbedeutend mit der Vorschrift, dass *der rechte Winkel* XOY *positiv* sein soll.

§ 9. Man nennt nun die vom Nullpunkt aus stets positiv gemessene Strecke OP den *Vector* r des Punktes P; den Neigungswinkel XOP dieses Vectors auch die *Abweichung* φ des Punktes P. Beide Grössen zusammen heissen, zur Unterscheidung von den rechtwinkligen Coordinaten, die *Polarcoordinaten* P. Ist für P der Vector $r = c$, die Abweichung $\varphi = \gamma$, so lauten die Polarcoordinaten für $P_1: r = c, \varphi = 180 - \gamma$; $P_2: r = c, \varphi = 180 + \gamma$; $P_3: r = c, \varphi = 360 - \gamma$.

Alle Punkte gleicher Abweichung φ liegen auf demselben Halbstrahl aus O; alle Punkte von gleichem Vector r auf demselben Kreis vom Centrum O und Radius r. Je ein Halbstrahl und ein solcher Kreis haben nur *einen* Punkt gemein.

§ 10. Allein die rechtwinkligen Coordinaten $x \mid y$ und die Polarcoordinaten r, φ desselben Punktes P müssen einander gegenseitig mitbestimmen, da jene wie diese die Lage von P fixiren. Ihr Zusammenhang ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $P'OP$ in den Formeln

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2},\ tg\,\varphi = \frac{y}{x};\ r \cos\varphi = x,\ r \sin\varphi = y.$$

Die beiden ersten liefern zu den Werten von x und y den Vector r und den Neigungswinkel φ, z. B. zu $x = 4$, $y = 3$, $r = 5$, $tg\,\varphi = 0{,}75$ ($\cos\varphi = 0{,}8$, $\sin\varphi = 0{,}6$); die beiden letzten umgekehrt zu r und φ Abscisse und Ordinate. Es sind, wie man sagt, die Formeln für den Übergang von der einen Coordinatenart zur andern.

Die erste Formel sagt ferner aus, dass die Coordinaten eines jeden Punktes, eines um O als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, eine constante Quadratsumme $x^2 + y^2$ ergeben. Die zweite Formel enthält ebenso eine gemeinsame Eigenschaft aller Punkte in der durch den Nullpunkt gehenden Geraden (Vectorgeraden) vom Neigungswinkel φ. Das Verhältnis der Ordinate zur Abscisse ist nur vom Winkel φ und nicht von der Entfernung r abhängig; und zwar ist der Wert für Punkte beider Halbstrahlen φ und $180 + \varphi$ derselbe, weil $tg\,(180 + \varphi) = tg\,\varphi$ ist. Um aber die beiden Halbstrahlen zu unterscheiden, liefert die dritte Formel die an und für sich klare Regel, dass positiven Abscissen spitze, negativen stumpfe Neigungswinkel des Vectors entsprechen.

§ 11. Gleichartig, nur allgemeiner wie die vorigen, sind die Aufgaben, die Entfernung d zweier Punkte A und B und den Neigungswinkel φ der Strecke AB zu berechnen, falls die rechtwinkligen Coordinaten $OA' = x_1$, $A'A = y_1$ von A und $OB' = x_2$, $B'B = y_2$ von B bekannt sind. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Katheten $AC = x_2 - x_1$ und $CB = y_2 - y_1$. Daher ist die Hypotenuse $AB = d$ von der Länge

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

und der Neigungswinkel φ, der gleich $\sphericalangle\, CAB$ ist, gegeben durch

$$tg\,\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Die erstere heisst die Distanzformel und gibt d als Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate gleichnamiger Coordinatendifferenzen. Daher ist das Vorzeichen unbestimmt, d. h. es bleibt durchaus willkürlich, ob man AB oder BA als eine positive Strecke betrachten will; nur die Länge ist bestimmt. Ebenso wenig gibt die Formel für den Neigungswinkel an, ob φ oder $180 + \varphi$ derjenige der positiven Strecke ist. Nehmen wir jedoch $AB = d$ positiv, so folgt φ unzweideutig aus den Formeln

$$d \cos\varphi = x_2 - x_1,\ d \sin\varphi = y_2 - y_1.$$

§ 12. Nun heisst auch die Strecke $A'B'$ Projection der Strecke AB auf die Abscissenaxe. Positiv oder negativ wird $A'B'$, je nachdem φ spitz oder stumpf ist, wenn AB als stets positiv gilt ($\cos(180 + \varphi) = -\cos\varphi$). Daher enthält die Formel $d\cos\varphi = x_2 - x_1$ den allgemein gültigen sogenannten Projectionssatz: Die Axenprojection einer Strecke AB wird nach Länge und Vorzeichen erhalten, wenn man die ab-

solute Masszahl der Länge von AB, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels des Halbstrahls AB.

Fällt der Punkt A mit dem Nullpunkt zusammen, d. h. ist speciell $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, so entstehen wieder die Formeln des § 10. Wirklich sind Abscisse und Ordinate eines Punktes $x \mid y$ auch definirt als die Axenprojectionen des Vectors r dieses Punktes.

§ 13. Die Vergleichung der Formeln für die Distanz je zweier Punkte $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (§ 11), $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ (§ 10), $AB = x_2 - x_1$ (§ 3) lehrt augenscheinlich, dass die Einfachheit und Kürze des Coordinatenausdrucks von der Wahl des Axenkreuzes abhängt. Um diese Wahl abändern zu können, muss man aus den Coordinaten $x \mid y$ eines Punktes in Bezug auf gegebene Axen seine Coordinaten $x' \mid y'$ in Bezug auf neugewählte Axen ableiten können, wenn die Lage der letzteren gegenüber den ursprünglichen bekannt ist. Man nennt diese Umrechnung eine Transformation der Coordinaten.

Gegeben seien zuerst zwei Axenkreuze mit verschiedenen Nullpunkten O, O' und je parallelen Abscissenaxen und Ordinatenaxen, so dass das eine mit dem andern durch Parallelverschiebung zur Deckung kommt. Aus den bekannten Coordinaten $OP' = x$, $OP'' = y$ eines Punktes P im ersten System seien die (durch einen Accent unterschiedenen) Coordinaten $O'Q' = x'$, $O'Q'' = y'$ desselben Punktes P im zweiten System zu berechnen, wenn der neue Nullpunkt O' im ersten System die Coordinaten $OA = x_0$, $OB = y_0$ hat. Dann ist offenbar

$$x' = x - x_0,\ y' = y - y_0 \text{ oder } x = x' + x_0,\ y = y' + y_0.$$

(Z. B. $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $x = 1{,}5$, $y = 2$, $x' = -0{,}5$, $y' = 1$). Man nennt diese Relationen zwischen ungestrichenen und gestrichenen Coordinaten $x \mid y$ und $x' \mid y'$ desselben Punktes bei paralleler Lage der Axen die Formeln der Verschiebungstransformation.

Infolge derselben ist z. B. $x'^2 + y'^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, d. h. den Coordinatenausdruck für die Strecke $O'P$, welche gegen das System O allgemeine Lage hat (§ 11), kann man erhalten, indem man sie als Vector des Punktes P in einem parallel verschobenen Axensystem betrachtet, zu dessen Nullpunkt der Anfangspunkt O' der Strecke genommen ist. Ganz ebenso folgt aus $y' : x' = tg\,\vartheta$ der allgemeine Ausdruck für den Neigungswinkel der Strecke $(y - y_0) : (x - x_0) = tg\,\vartheta$ (§ 11).

Die eine Relation so in die andere umwandeln, heisst sie transformiren; man kann die bekannte Form derselben dadurch entweder verallgemeinern oder sie specicalisiren (d aus r oder r aus d, § 10 und 11).

§ 14. Unter einer Drehungstransformation der Coordinaten versteht man die Herleitung der Coordinaten $x' \mid y'$ eines Punktes P in Bezug auf ein Axenkreuz, welches aus dem gegebenen Axenkreuz der $x \mid y$ durch eine blosse Drehung um den gemeinsamen Nullpunkt O erhalten wird. Der Neigungswinkel der neuen positiven x'-Achse gegen die ursprüngliche positive x-Axe, heisst der Drehungswinkel ϑ. Die zwischen alten und neuen Coordinaten desselben Punktes bestehenden Transformationsformeln für Drehung erhält man, indem man je die Axenprojectionen des Vectors OP und des gebrochenen

Zuges $OQ'P$, dessen Strecken $OQ' = x'$, $OP' = y'$ sind, einander gleich setzt (§ 12). Da der Neigungswinkel der positiven y'-Axe nun $(90 + \vartheta)$ beträgt, so ist

$$OP' = OQ' \cos\vartheta + Q'P \cos(90 + \vartheta), \text{ oder } x = x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta,$$
$$OP'' = OQ' \sin\vartheta + Q'P \sin(90 + \vartheta), \text{ oder } y = x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach den Unbekannten x' und y' folgt

$$x' = x \cos\vartheta + y \sin\vartheta, \quad y' = -x \sin\vartheta + y \cos\vartheta.$$

Man erhält sie auch, indem man in den vorigen $-\vartheta$ statt ϑ setzt, weil die x'-Axe durch eine (negative) Drehung um $-\vartheta$ in die x-Axe zurückgeführt wird. Direct kann man sie ableiten, indem man von OP und dem gebrochenen Zug $OP'P$ die Projectionen auf die neuen Axen bildet.

Die Drehungstransformation besitzt die Eigenschaft, dass die Quadratsumme der ungestrichenen Coordinaten gleich derjenigen der gestrichenen Coordinaten desselben Punktes ist:

$$x^2 + y^2 = (x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta)^2 + (x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta)^2 = x'^2 + y'^2.$$

Ferner ist zuweilen nützlich, eine gegebene Relation so zu transformiren, dass die Halbirungslinien der Winkel der x- und y-Axe als x'- und y'-Axe genommen werden. Liegt dann die x'-Axe im vierten Quadranten, so ist $\vartheta = -45^0$, $\cos(-45) = +\sin(-45) = 1 : \sqrt{2}$, also

$$x\sqrt{2} = x' + y', \; y\sqrt{2} = -x' + y' \text{ oder } x'\sqrt{2} = x - y, \; y\sqrt{2} = x + y.$$

Hierdurch geht z. B. die Quadratdifferenz $x^2 - y^2$ über in das Doppelproduct $2x'y' = (x - y)(x + y)$.

§ 15. Offenbar kann jedes rechtwinklige Axenkreuz $O\,(x, y)$ mit jedem andern $O'\,(x'', y'')$ von gleichem Drehungssinn zur Deckung gebracht werden, indem man zuerst jenes parallel bis zum Nullpunkt O' verschiebt (§ 13), dann dieses vermittelnde Axenkreuz $O'\,(x', y')$ noch um O' dreht (§ 14) oder in umgekehrter Reihenfolge. So kann man durch Transformation eine ganz willkürliche Gerade g der Ebene zur Axe eines neuen Coordinatensystems machen.

Wir denken uns etwa durch den gegebenen Nullpunkt O eine Normale und eine Parallele zu g gezogen, erstere als x'-Axe, letztere als y'-Axe genommen. Und zwar möge der g in N schneidende Halbstrahl der Normalen ON die positive x'-Axe, ϑ sein Neigungswinkel sein. Ein Punkt $x\,|\,y$ hat also die neue Abscisse $x' = x \cos\vartheta + y \sin\vartheta$ (§ 14). Nehmen wir ferner die gegebene Gerade als y''-Axe in einem zum zweiten parallelen dritten Coordinatensystem, so ist $x'' = x' - n$, wenn n der normale Abstand ON von O und g ist; also sind für denselben Punkt $x\,|\,y$

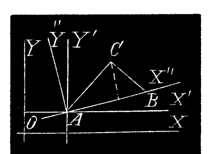
$$x'' = x \cos\vartheta + y \sin\vartheta - n.$$

Dies Resultat lässt sich aber auch unabhängig von der Coordinatentransformation deuten. Es ist nämlich x'' der normale Abstand des Punktes $x\,|\,y$ von der Geraden g, falls derselbe stets von g aus zum gegebenen Punkt hin gezählt wird. Alsdann sind somit die Abstände der Punkte, je nachdem sie auf der O abgewendeten oder zugewendeten Seite der Geraden g liegen, als positiv oder negativ zu bezeichnen. Nun kann man aber für jede Gerade g den normalen Abstand n vom Nullpunkt und dessen Neigungswinkel ϑ angeben. Dann findet man den normalen Abstand eines Punktes $x\,|\,y$ von der Geraden,

indem man seine Coordinatenwerte in obigen Ausdruck x'' einsetzt. So ist z. B. für die Gerade $n = 3$, $\vartheta = 30^\circ$ und den Punkt $8 \mid -2$ der Abstand $4\,(\sqrt{3} - 1)$.

Die Aufgabe, diesen Abstand zu bestimmen, kann auch direct gelöst werden, indem man die Projection des Coordinatenzugs $OP'P$ des Punktes auf die Normale ON (x'-Axe) bildet und bedenkt, dass dieselbe dem um n vermehrten gesuchten Abstande gleich sein muss.

§ 16*. Eine weitere Anwendung des Transformirens bietet die Berechnung des Flächeninhaltes $\varDelta$ eines Dreiecks ABC aus den Coordinaten $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, $x_3 \mid y_3$ seiner Ecken A, B, C.



Dieselbe ist evident in Bezug auf Axen, welche A zum Nullpunkt und die Seite $AB = x''_2$ in der Abscissenaxe gelegen haben. Denn, ist die Dreieckshöhe die Ordinate y''_3 von C, so ist $2\varDelta = x''_2\, y''_3$. Sehr zu beachten ist dabei, dass diese doppelte Dreiecksfläche nur dann positiv wird, wenn x''_2 und y''_3 gleiche Vorzeichen haben, der Drehungssinn des Winkels ABC also positiv ist. Dagegen wird bei verschiedenen Vorzeichen von x''_2 und y''_3 sowol $2\varDelta$ als $\sphericalangle BAC$ negativ. Durchläuft nun ein Punkt die Seiten des Dreiecks in der Folge ABC, so ist jener Dreieckswinkel positiv oder negativ, je nachdem das Dreiecksinnere links oder rechts von dem bewegten Punkte bleibt, oder, wie man dann sagt, je nachdem der Umlaufssinn ABC des Dreiecks positiv oder negativ ist.

Nehmen wir nun ein zum gegebenen paralleles Axenkreuz mit A als Nullpunkt an, in welchem B durch $x'_2 \mid y'_2$, C durch $x'_3 \mid y'_3$ bestimmt ist, so ist der Neigungswinkel der x'-Axe gegen die x''-Axe negativ, also $\cos\,\vartheta = x'_2 : \sqrt{x'^2_2 + y'^2_2}$, $\sin\,\vartheta = y''_2 : \sqrt{x'^2_2 + y'^2_2}$. Nach § 13 ist dann

$$x'' = \frac{x'_2\, x' + y'_2\, y'}{\sqrt{x'^2_2 + y'^2_2}},\quad y'' = \frac{-\,y'_2\, x' + x'_2\, y'}{\sqrt{x'^2_2 + y'^2_2}},$$

also
$$2\varDelta\, x''_2\, y''_3 = x'_2\, y'_3 - x'_3\, y'_2.$$

Das gibt den doppelten Flächeninhalt eines von zwei Punkten B, C mit dem Nullpunkte bestimmten Dreiecks.

Endlich werden die im ursprünglichen System geltenden Coordinaten mittelst der Formeln $x'' = x - x_1$, $y'' = y - y_1$ eingeführt. Also lautet die allgemeine Inhaltsformel

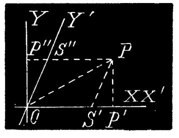
$$2\varDelta = (x_2 - x_1)\;(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)\;(y_2 - y_1),$$
$$2\varDelta = (x_2\, y_3 - x_3\, y_2) + (x_3\, y_1 - x_1\, y_3) + (x_1\, y_2 - x_2\, y_1).$$

Dieselbe ergibt einen positiven oder negativen Wert, je nach dem Vorzeichen des Umlaufssinnes ABC. Denn, berechnen wir die Fläche für B als erste, C als zweite, A als dritte Ecke, so erhalten wir dieselbe Formel, da nur die Indices 1, 2, 3 der Reihe nach durch 2, 3, 1 zu ersetzen sind. Man nennt eine solche Vertauschung der drei Indices cyclisch, weil sie die Folge (den Cyclus) der Punkte auf dem Umfang nicht ändert. Dagegen hat die Formel für ACB den entgegengesetzten Wert, entsprechend einer blossen Vertauschung zweier Indices (2 und 3). Die einzelnen Klammerausdrücke geben die doppelten Inhalte der Drei-

ecke OBC, OCA, OAB, wobei aber stets eines derselben ein anderes Vorzeichen, als die beiden andern hat.

B.: $A\,2\,|\,3$, $B\,3-|-4$, $C-3\,|-6$; $2\varDelta = -30+3-17 = -44$.

§ 17*. Ausser rechtwinkligen und polaren Coordinaten wird zuweilen noch ein allgemeineres Coordinatensystem verwendet, in welchem irgend zwei einander (in O) schneidende Geraden der Ebene als Coordinatenaxen dienen. Denn jeder Punkt P der Ebene kann als freie Ecke eines Parallelogramms $OS'PS''$ angesehen werden, von welchem zwei Seiten OS' und OS'' in jene Axe fallen. Also ist P völlig bekannt, wenn in jeder Axe die Parallelogrammseite von O aus als Strecke $OS' = X$, $OS'' = Y$ gemessen wird. Man nennt dann wieder die Strecken der einen Axe Abscissen X, die der andern Ordinaten Y und bezeichnet den Winkel XOY der positiven Halbaxen als den Coordinatenwinkel ω. Diese Coordinaten $X\,|\,Y$, welche auch in den Parallelen $S''P$ und $S'P$ zu den Axen zu messen sind, nennt man Parallelcoordinaten und zwar schiefe, wenn ω nicht, wie bisher, ein rechter Winkel ist. Die vier Felder, in welche die Axen die Ebene zerlegen, sind wiederum durch die Vorzeichen der Coordinaten ihrer Punkte unterschieden (§ 7).



§ 18*. Schiefe Coordinaten $X\,|\,Y$ eines Punktes kann man folgendermassen aus den rechtwinkligen $x\,|\,y$ desselben durch Transformation erhalten. Man denke sich die beiden Coordinatensysteme mit demselben Nullpunkt und gemeinsamer Abscissenaxe, die neue Ordinatenaxe unter dem Winkel ω gegen jene geneigt. Dann folgt aus dem Dreieck $OP''S''$ mit $\sphericalangle S''OP'' = 90 - \omega$

$$x = X + Y\cos\omega,\; y = Y\sin\omega, \text{ also } X = x - y\,ctg\,\omega,\; Y = y : \sin\omega.$$

(2 B. $\omega = 60$, $\cos 60 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin 60 = \frac{1}{2}$; $x = 3, y = 1$, $X = 3 - \sqrt{3}$, $Y = 2$). Diese Formeln der Neigungstransformation (wie man sagen kann) genügen in Verbindung mit denen für Transformation rechtwinkliger Coordinaten für alle Transformationen schiefer Coordinaten.

Transformiren wir wiederum die Formeln für Vector r und Abweichung ϑ eines Punktes $x\,|\,y$ zu schiefen Coordinaten durch Einsetzung von $X + Y\cos\omega$ statt x, $Y\sin\omega$ statt y, so wird

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(X + Y\cos\omega)^2 + Y^2\sin^2\omega} = \sqrt{X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega},$$

$$tg = \frac{y}{x} = \frac{Y\sin\omega}{X + Y\cos\omega}.$$

Die erste Relation ergibt sich auch direct als der sog. Cosinussatz der Trigonometrie, angewandt auf das Dreieck $OQ'P$.

Die Ausdrücke für Längen und Winkel in schiefen Coordinaten sind also wesentlich complicirter als die gleichbedeutenden Ausdrücke in rechtwinkligen Coordinaten, empfehlen sich daher in der Regel nicht. Dagegen bieten schiefe Coordinaten den Vorteil, zwei beliebige Gerade der Ebene als Coordinatenaxen bemerken zu können, statt nur einer (§ 15).

Im folgenden sind stets, wo nicht ausdrücklich anders bemerkt, rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt und angewandt.

II. Die Gerade.

§ 19. Neben Gruppen von getrennt liegenden Punkten bestehen die Gebilde der ebenen Geometrie in Linien, welche unzählig viele Punkte in stetiger Aufeinanderfolge enthalten. Die Geometrie betrachtet aber nur solche Linien, welche von einem beweglichen oder „laufenden" Punkte P erzeugt werden, wenn er sich nach einem angebbaren Gesetze bewegt. Ein so entstehender Zug heisst der geometrische Ort des Punktes P und kann aus geraden und krummen Linien, d. h. Geraden und Curven bestehen. So ist der Kreis der Ort eines Punktes, der von einem festen Mittelpunkt den constanten Abstand r hat. Der Ort eines Punktes, der von einer festen Geraden constanten Abstand a hat, besteht dagegen aus zwei Parallelen zu dieser Geraden.

In der analytischen Geometrie wird der Punkt durch je zwei Zahlen vertreten, feste Elemente also durch constante Zahlen, ein beweglicher Punkt dagegen durch ein Paar veränderlicher oder laufender Coordinaten $x \mid y$. Alsdann findet ein gegebenes Bewegungsgesetz seinen Ausdruck durch eine Gleichung zwischen $x \mid y$ und Constanten. So gibt die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ das Gesetz an, dass der Abstand OP fortwährend gleich r sei, weil $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Wenn die Coordinaten eines jeden Punktes des vorgelegten Ortes stets einer zwischen x und y bestehenden Gleichung Genüge leisten, so heisst diese die Gleichung des Ortes. Daher gilt $x^2 + y^2 = r^2$ als die Gleichung des Kreises von Mittelpunkt O und Radius r (§ 10).

§ 20. Die einfachsten Beispiele solcher Örter und ihrer Gleichungen sind die Gruppen von Axenparallelen. So hat jeder Punkt $a \mid y$ von beliebiger Ordinate die Eigenschaft, in einer bestimmten Parallelen zur y-Axe zu liegen. Daher heisst $x = a$ die Gleichung dieser Parallelen, $x = 0$ insbesondere die Gleichung der Ordinatenaxe selbst (§ 7).

Ist ferner eine Gleichung höheren Grades mit nur einer Unbekannten x gegeben, z. B. $x^2 = a^2$, so ergibt ihre Auflösung bestimmte Werte derselben ($x = \pm a$). Eine solche Gleichung definirt einen Ort, dessen Punkte ihre Wurzeln als Abscissen, aber beliebige Ordinaten besitzen. Also besteht der Ort aus einer Gruppe von Geraden, welche zur Ordinatenaxe parallel sind. Und Entsprechendes gilt für Gleichungen mit y als einziger Unbekannten.

§ 21. Aber auch jede Gleichung zwischen zwei veränderlichen Coordinaten x, y definirt im allgemeinen einen geometrischen Ort des Punktes $x \mid y$, falls sie auf ein gegebenes Coordinatensystem bezogen wird. Denn, setzen wir einen willkürlich gewählten Wert a für x (oder b für y) ein, so entsteht eine Gleichung, welche nur noch y (oder dann x) als einzige Unbekannte enthält. Ergibt ihre Auflösung alsdann eine Anzahl reeller Wurzeln $w_1, w'_1 \ldots$, so befriedigt jedes Wertepaar $a \mid w$, $a \mid w', \ldots$ (oder $w \mid b$, $w' \mid b, \ldots$) die Gleichung, gibt also die Coordinaten eines Punktes dieses Ortes. So folgt z. B. aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ die nach y aufgelöste Form $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, also zu $x = 0$, $x = \pm r$, zu $x = \pm r$, $x = 0$, zu $x = \pm \frac{1}{2} r, \pm \frac{1}{3} r, \ldots y = \pm \frac{1}{2} r \sqrt{3}, \pm \frac{2}{3} r \sqrt{2}, \ldots$, überhaupt 2 Punkte zu jeder Abscisse x, für welche $r^2 > x^2$ ist.

Auf diese Art kann man sich im allgemeinen zu jeder Gleichung beliebig viele, reelle Wertepaare berechnen, welche sie befriedigen. Je geringer nun der Unterschied der auf einander folgenden Abscissenwerte ist, desto geringer ist im allgemeinen auch der Unterschied der zugehörigen Ordinatenwerte, desto näher liegen also die durch die Coordinatenpaare bestimmten Punkte an einander. Also bilden sie, von Ausnahmen abgesehen, eine stetige Linie, den durch die Gleichung definirten geometrischen Ort.

§ 22. Von dem Orte sind so nach einander die Schnittpunkte mit Parallelen zu einer Axe ermittelt worden, z. B. mit $x = a$. So ist schon der Punkt $a \mid b$ eigentlich bestimmt als Schnittpunkt der beiden Axenparallelen $x = a$ und $y = b$. So können überhaupt aus zwei verschiedenen Gleichungen zwischen $x \mid y$ für diese beiden gemeinsame Wurzelpaare berechnet werden. Da dieselben beide Gleichungen befriedigen, so geben sie, falls reell, Schnittpunkte der dargestellten geometrischen Örter an.

So setzt das Werkzeug der Coordinaten die analytische Geometrie in den Stand, die geometrischen Probleme nach rechnender Methode zu behandeln. Sie stützt daher ihre Schlüsse auf die Sätze der Algebra und Analysis. In der Hauptsache sucht sie Gleichungen von Örtern aufzustellen und die geometrischen Eigenschaften der Örter aus der Discussion dieser Gleichungen zu erkennen. Die Elemente beschäftigen sich nur mit den einfachsten Örtern: Geraden, Kreisen, Kegelschnitten.

§ 23. Die Geraden der Ebene liegen entweder allgemein gegen ein angenommenes Coordinatensystem oder speciell, und dann zwar so, dass sie entweder einer Axe parallel sind (§ 20) oder durch den Nullpunkt gehen. Eine Gerade letzterer Art heisst Vectorgerade und ist der Ort eines Punktes, dessen Abstände von den Coordinatenaxen ein constantes Verhältnis $y : x = m$ haben (§ 10). Dies Verhältnis ist aber gleich der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels α oder $(180 + \alpha)$ der Vectorgeraden $m = tg\, \alpha = tg\,(180 + \alpha)$. So lange kein positiver Sinn in der Geraden festgesetzt ist (§ 8), sei unter α der kleinste positive Neigungswinkel derselben verstanden.

Nun gibt es zu jeder Geraden der Ebene eine parallele Vectorgerade, deren Richtung nur von m abhängt. Daher heisst die Zahl $m = tg\, \alpha$ die Richtungszahl jeder Geraden vom Neigungswinkel α.

Umgekehrt ist $y = m x$ die Gleichung der Vectorgeraden der Richtungszahl m. Denn sie liefert zu $x = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. der Reihe nach $y = \ldots -2m, -m, 0, m, 2m \ldots$, also lauter ähnliche Dreiecke OPP' (Fig. § 9). Je nachdem m positiv oder negativ ist, geht die Gerade durch die ungeraden oder geraden Quadranten. Insbesondere sind $y = x$ und $y = -x$ die Gleichungen der Halbirungslinien der Axenwinkel.

§ 24. Zwei Vectorgerade OP, OQ von den Richtungszahlen $m_1 = tg\, \alpha_1$, $m_2 = tg\, \alpha_2$ schliessen einen Winkel $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ (§ 8) ein, dessen Tangente nach der Trigonometrie ist

$$tg\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\, \alpha_2 - tg\, \alpha_1}{1 + tg\, \alpha_1\; tg\, \alpha_2} \text{ oder } tg\, \delta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Dies gibt auch den Winkel δ beliebiger Geraden von denselben Richtungszahlen. Bedeuten α_1, α_2 die kleinsten positiven Neigungen (§ 23), so ist $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ derjenige Winkel der Drehung von der ersten zur zweiten parallelen Vectorgeraden, welcher in den beiden ersten Quadranten gemessen wird (Beispiel: $\alpha_1 = 45^0$, $\alpha_2 = 120^0$; $m_1 = 1$, $m_2 = -\sqrt{3}$; $tg\,\delta = 2 + \sqrt{3}$, $\delta = 75^0$).

Insbesondere wird $tg\,\delta = \infty$, also $\delta = 90^0$, wenn der Nenner des Bruches gleich Null ist. Also haben zwei zu einander normale Gerade Richtungszahlen, deren Product die negative Einheit ist:

$$m_1\, m_2 = -1 \text{ oder } m_2 = -1 : m_1.$$

Bestätigt wird dies durch die goniometrische Formel $tg(90 + \alpha_1) = -ctg\,\alpha_1$.

§ 25. Gerade, die durch einen gegebenen Punkt $A\,(x_1 \mid y_1)$ gehen, können als Vectorgerade in einem zum gegebenen parallelen Axenkreuz der x', y' vom Nullpunkt A betrachtet werden. Aus der auf dieses bezogenen Gleichung $y' = mx'$ (§ 23) folgt mittelst der Verschiebungsformeln des § 13

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

als Gleichung einer Geraden von der Richtungszahl m, die durch den Punkt $x_1 \mid y_1$ geht. Man erhält sie auch direct aus der Ähnlichkeit aller rechtwinkligen Dreiecke von den Katheten $x - x_1, y - y_1$ (vgl. Fig. § 11).

Diese Gleichung löst die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden zu ziehen. Ebenso ist nach dem Schlusse von § 24 die Gleichung der durch den Punkt $x_1 \mid y_1$ gehenden Normalen zu einer Geraden von der Richtungszahl m

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}\,(x - x_1).$$

§ 26. Nimmt man den gegebenen Punkt auf der Ordinatenaxe in K an (Fig. § 11), so dass $x_1 = 0$, $y_1 = k$ zu setzen ist, so lautet die Gleichung einer Geraden der Richtungszahl m, welche auf der y-Axe den Abschnitt $OK = k$ macht

$$y - k = m\,x \text{ oder } y = m\,x + k.$$

Direct wird dieselbe gefunden aus den ähnlichen Dreiecken von der Hypotenuse KB und den Katheten $KQ = x$ und $QB = y - k$. Jede beliebige nicht zur Ordinatenaxe parallele Gerade hat eine Gleichung obiger Form, denn sie besitzt eine endliche Richtungszahl m und einen endlichen Schnittpunkt $0 \mid k$ mit der Ordinatenaxe. Man nennt dieselbe die gemeine Gleichung der Geraden.

Die gemeinen Gleichungen zweier Parallelen unterscheiden sich nur in ihren constanten Gliedern, lauten nämlich $y = mx + k_1$ und $y = m\,x + k_2$, wenn m die gemeinsame Richtung angibt.

§ 27. Die Gerade ist am allgemeinsten durch zwei Punkte $A\,(x_1 \mid y_1)$ und $B\,(x_2 \mid y_2)$ bestimmt. Nun hat die Strecke AB die Richtungszahl $m = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$. Setzt man also diesen Wert ein in die Gleichung einer durch $x_1 \mid y_1$ (oder $x_2 \mid y_2$) gehenden Geraden (§ 25), so erhält man die Gleichung der Verbindungsgeraden zweier Punkte

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) \text{ oder } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sie ist in der zweiten Form leicht zu merken, weil beide Seiten nur verschiedene Ausdrücke derselben Richtungszahl sind.

Als weitere Formen ergibt die Beseitigung der Nenner

$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1),$$
$$(x_2-x_1)y-(y_2-y_1)x+x_1y_2-x_2y_1=0.$$

Letztere zeigt die Gleichartigkeit der Gleichung in Bezug auf die Coordinaten beider Punkte. Die linke Seite der ersteren Gleichung ist der Coordinatenausdruck des § 17 für den doppelten Inhalt des Dreiecks ABP. Die Gleichung der Verbindungsgeraden AB drückt also die Bedingung aus, dass das Dreieck den Flächeninhalt Null habe, seine Spitze $x \mid y$ somit in der Grundlinie AB liege.

Fällt B in den Nullpunkt ($x_2=0$, $y_2=0$), so geben die Gleichungen die Vectorgerade des Punktes A, am einfachsten als

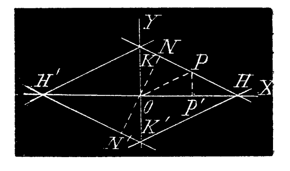
$$y:x=y_1:x_1 \text{ oder } x_1y-y_1x=0.$$

Rückt dagegen B in der Geraden von der Richtungszahl m ins Unendliche, so sind in dem Differenzenquotienten $(y_2-y_1):(x_2-x_1)=m$ die Subtrahenden gegen die Minuenden zu vernachlässigen und m erweist sich als das Verhältnis der unendlich grossen Coordinaten $y_2:x_2$ des unendlich fernen Punktes B_2. Also ist die Bestimmung der Geraden durch einen Punkt und die Richtung (§ 25) nur ein besonderer Fall der Festlegung durch zwei Punkte.

B.: Man bilde die Gleichungen der Seiten- und Mittellinien im Dreieck $2 \mid 3$, $3 \mid -4$, $-3 \mid -6$.

§ 28. Von Nutzen ist die Gleichungsform, welche aus der vorigen entsteht, wenn die Schnittpunkte H, K der Geraden mit den Axen zu ihrer Festlegung benutzt werden. Ist $OH=h$, $OK=k$, so hat man nur einzusetzen $x_1=h$, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2=k$ und bekommt

$$y=\frac{k}{-h}(x-h) \text{ oder } \frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1.$$



Letztere nennt man die symmetrische Gleichung der Geraden. Erstere bietet in Form der Proportion $y:k=(h-x):h$, welche aus der Ähnlickeit der Dreiecke OHK und $P'HP$ hervorgeht, eine directe Ableitung derselben. Nur Vectorgerade lassen sich nicht so darstellen, weil sie beide Axen im O schneiden. Dagegen ist für die andern Geraden ihre Lage nach dieser Gleichung besonders leicht zu unterscheiden. Das durch die Axen begrenzte Stück liegt im I. Quadranten (HK), wenn $h>0$, $k>0$ ist, im II. ($H'K$) für $h<0$, $k>0$, im III. ($H'K'$) für $h<0$, $k<0$, im IV. (HK') für $h>0$, $k<0$.

§ 29. Eine beliebige Gerade der Ebene kann auch durch ihren Normalabstand $ON=n$ vom Nullpunkt und den Neigungswinkel $XON=\vartheta$ des die Gerade schneidenden positiven Halbstrahls dieser Normalen festgelegt werden (§ 15). In der Tat bestimmt n als Vector und ϑ als Abweichung einen Punkt N, in welchem auf ON die Normale zu errichten ist, um die gesuchte Gerade zu erhalten. Also sind n, ϑ die Polarcoordinaten des Fusspunktes des zur Geraden normalen Vectors.

Nimmt man nun ON zur positiven Abscissenaxe eines um den Winkel ϑ gedrehten Axenkreuzes der x', y', so hat die gegebene

Gerade in diesem System die Gleichung $x' = n$. Zufolge der Drehungstransformation (§ 14) ist aber $x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta$. Also ist für jeden Punkt $x \mid y$ der Geraden

$$x \cos \vartheta + y \sin \vartheta = n \quad \text{oder} \quad x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - n = 0,$$

d. h. dies ist die Gleichung der Geraden und zwar heisst sie die Normalgleichung der Geraden. Man leitet sie direct her, indem man die Projection des gebrochenen Coordinatenzugs $OP'P$ des laufenden Punktes auf die Normale ON berechnet: $OP \cos \vartheta + P'P \cos (90 - \vartheta) = ON$.

Jede Gerade kann durch die Normalgleichung dargestellt werden, speciell ist für Vectorgerade $n = 0$, für Axenparallele $\sin \vartheta = 0$ oder $\cos \vartheta = 0$. Ist aber n an Null verschieden, so kann man leicht die früheren Gleichungsformen der Geraden aus der Normalgleichung bilden. Durch Division durch n ergibt sich die symmetrische Gleichung des § 28, wenn man setzt

$$OH = h = \frac{n}{\cos \vartheta}, \quad OK = k = \frac{n}{\sin \vartheta},$$

wie sich aus den Dreiecken OHN und OKN direct ergibt. Und ist ferner ϑ von Null verschieden, so gibt Division der Normalgleichung durch $\sin \vartheta$ die gemeine Gleichung

$$y = -x \, ctg \, \vartheta + k.$$

In der Tat ist $-ctg \, \vartheta = m$ die Richtungszahl der Geraden, da ihr Neigungswinkel $\alpha = \vartheta \pm 90$ ist.

§ 30*. Endlich enthält die Normalgleichung noch eine neue Gleichungsform der Geraden. Hat nämlich der laufende Punkt P die Polarcoordinaten $OP = r$, $\sphericalangle XOP = \varphi$, so ist nach § 10 $x \cos \vartheta + y \sin \vartheta = r \cos (\varphi - \vartheta)$. So entsteht eine Gleichung zwischen Polarcoordinaten

$$r \cos (\varphi - \vartheta) = n,$$

die Polargleichung der Geraden. Sie sagt aus, dass die Projection des Vectors des laufenden Punktes auf die Normale gleich dem Normalabstand ist.

§ 31. Besonders anwendbar ist die Normalgleichung der Geraden in Aufgaben, welche sich auf Winkel oder Normalabstände beziehen. Denn der Richtungsunterschied δ zweier Geraden, deren Normalen n_1, n_2 die positiven Neigungen ϑ_1, ϑ_2 haben, ist einfach $\delta = \vartheta_2 - \vartheta_1$. Und zwar gibt diese Differenz nach Grösse und Sinn den Winkel derjenigen Drehung von der ersten zur zweiten Geraden, bei welcher der sich drehende Strahl den Nullpunkt nicht überschreitet, oder kurz den O nicht einschliessenden Winkel.

Ferner fand sich schon in § 15 der normale Abstand eines beliebigen Punktes $x_1 \mid y_1$ von der Geraden n, ϑ als

$$x_1 \cos \vartheta + y_1 \sin \vartheta - n.$$

Der Normalabstand eines Punktes von einer Geraden wird so erhalten als der Wert der linken Seite ihrer Normalgleichung nach Einsetzung der gegebenen Coordinaten statt der laufenden. Wenn durch diese Einsetzung die linke Seite den Wert Null erhält, so liegt der Punkt auf der Geraden selbst. Positiv sind dann nur die Abstände aller Punkte, die vom Nullpunkt durch die Gerade getrennt sind. Eine Parallele im Abstand $\pm p$ von obiger ist $x \cos \vartheta + y \sin \vartheta = n \pm p$.

§ 32. Jede bisherige Gleichung der Geraden besitzt nur Glieder, welche x und y entweder in der ersten Potenz oder gar nicht enthalten. Jede Gleichung einer Geraden ist also vom ersten Grade. Die allgemeine Gleichung ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen x, y hat die dreigliedrige Gestalt

$$Ax + By + C = 0.$$

Umgekehrt ist jede Gleichung ersten Grades zwischen laufenden Coordinaten x, y die Gleichung einer Geraden. Denn sie lässt sich stets durch blosse Division so umformen, dass sie mit der Normalform $x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - n = 0$ identisch wird. Zwei Zahlen A und B können stets dem Cosinus und Sinus eines Winkels ϑ proportional gesetzt werden. Soll nämlich $A = \varrho \cos \vartheta$, $B = \varrho \sin \vartheta$ sein, so muss nur $A^2 + B^2 = \varrho^2$ gesetzt werden. Also ist die allgemeine Gleichung Glied für Glied durch $\sqrt{(A^2 + B^2)}$ (z. B. $3x - 2y - 5 = 0$ durch $\sqrt{13}$) zu dividiren, um die Normalgleichung zu bekommen, mit ϑ, n aus den Formeln

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \vartheta, \; \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \vartheta, \; \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = n.$$

Damit aber n einen positiven Wert erhalte, muss das Vorzeichen der Wurzel positiv oder negativ gewählt werden, je nachdem das constante Glied C negativ oder positiv ist. Zugleich bestätigen die Deutungen der Quotienten, dass, wenn A und B als reine Zahlen betrachtet werden, C die Masszahl einer Länge ϱn bedeuten muss (§ 3).

Nach § 31 ist zugleich

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

der Normalabstand des Punktes $x_1 \mid y_1$ von der Geraden.

B.: Man berechne Winkel und Höhen im Dreieck § 27.

Man bestimme den normalen Abstand der Parallelen $y = mx + k$, $y = mx + k'$.

§ 33. Ebenso kann aus der allgemeinen Gleichung die symmetrische Form hergestellt werden, wenn nicht etwa C oder B Null ist. Im ersten Fall lässt sie sich so schreiben, dass die Axenabschnitte

$$h = -\frac{C}{A}, \; k = -\frac{C}{B}$$

werden (z. B. $h = -{}^5/_3$, $k = -{}^5/_2$). Dasselbe Resultat ergibt die Überlegung, dass die Coordinaten $h \mid 0$, $0 \mid k$ der Axenschnittpunkte erhalten werden, wenn man für y oder x einsetzt Null, also aus

$$Ah + C = 0, \; Bk + C = 0.$$

Im zweiten Fall ergibt die Division durch B die Gleichung

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B},$$

so dass sich die Richtungszahl m gleich dem Coefficientenverhältnis $-A : B$ ergibt, (z. B. $m = {}^3/_2$, wie auch aus $-ctg\,\vartheta$ folgt).

Die Lage einer Geraden ist so durch je zwei Zahlen bestimmt, entweder durch die Axenabschnitte h, k, oder durch einen k und die Richtungszahl m, oder durch den Normalabstand n und die Normalenneigung ϑ. Auch die allgemeine Gleichung hängt nur scheinbar von

drei Zahlen A, B, C ab, in Wahrheit nur von zwei Verhältnissen derselben. Daher können irgend zwei Verhältnisse geradezu als Bestimmungsstücke der Geraden betrachtet werden, wie die Coordinaten $x \mid y$ als diejenigen des Punktes.

§ 34. Nun ist der Punkt stets als Schnittpunkt zweier Geraden bestimmbar. Die Coordinaten des Schnittpunktes bilden das einzige Wertepaar $x \mid y$, das den Gleichungen der beiden gegebenen Geraden gleichzeitig genügt

$$A x + B y + C = 0, \; A \; x + B' y + C' = 0.$$

Also folgt durch Auflösung für dieselben

$$x = \frac{B C' - B C'}{A B' - A B'}, \; y = \frac{C A' - C' A}{A B' - A' B}.$$

Unendlich gross werden sie, behalten jedoch ein angebbares Verhältnis, wenn der Nenner $AB' - A'B = 0$ ist oder die Richtungszahlen $- A : B = - A' : B'$ (§ 33) gleich sind. Also definirt diese Bedingung zwischen den Gleichungscoefficienten den Parallelismus der gegebenen Geraden.

Ist dagegen $A : B = - B' : A'$ oder $A A' + B B' = 0$, so sind die Richtungszahlen entgegengesetzt reciprok (§ 24), d. h. unter dieser Bedingung für die Coefficienten sind die durch die Gleichungen dargestellten Geraden zu einander normal (Bedingung der Rechtwinkligkeit).

B.: Man bestimme die Schnittpunkte zweier Geraden von den Axenabschnitten h, k; h', k' unter einander und mit der Geraden $x = y$.

§ 35. Umgekehrt ist die Gerade durch zwei Punkte $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ bestimmbar. Da ihre Gleichung von der Form $A x + B y + C = 0$ sein muss, so sind nur die Zahlen A, B, C noch zu bestimmen. Soll die Gerade durch $x_1 \mid y_1$ gehen, so muss die Bedingung erfüllt sein $A x_1 + B y_1 + C = 0$, so dass C durch A, B, $x_1 \mid y_1$ ausgedrückt ist. Daher lautet die allgemeine Gleichung einer durch $x_1 \mid y_1$ gehenden Geraden $A (x - x_1) + B (y - y_1) = 0$ oder $y - y_1 = m (x - x_1)$ (§ 25). Soll die Gerade ferner durch $x_2 \mid y_2$ gehen, so muss auch $Ax_2 + By_2 + C = 0$ sein. Mittelst beider Bedingungen lassen sich jedoch $A : C$ und $B : C$ durch die bekannten Grössen $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ ausdrücken und geben eingesetzt die Gleichung des § 27.

Dass eine Gerade durch einen gegebenen Punkt gehen oder eine gegebene Richtung haben solle (§ 34), nennt man lineare Bedingungen für die Coefficienten der allgemeinen Gleichung der Geraden. Zwei solche Bedingungen, die sich nicht widersprechen, bestimmen daher die Lage und die Gleichung. So folgt z. B. die Gleichung der aus einem Punkte $x_1 \mid y_1$ auf die Gerade $A' x + B' y + C' = 0$ gefällten Normalen $A x + B y + C = 0$ aus den Bedingungen $A x_1 + B y_1 + C = 0$, $A A' + B B' = 0$ als $B (x - x_1) - A (y - y_1) = 0$, wie früher § 25.

B.: Man bilde die Gleichungen der Höhen und der Mittelnormalen im Dreieck § 27.

§ 36. Das Gesetz für die geradlinige Bewegung eines Punktes kann noch anders als durch die Gleichung der Geraden angegeben werden. So liegt der Endpunkt C einer Strecke $A C$ von gegebenem Anfangspunkt A $(x_1 \mid y_1)$ und gegebener Neigung ϑ $(tg\, \vartheta = m)$ stets in der festen Geraden $y - y_1 = m (x - x_1)$, welches auch die Länge d der Strecke sei. Dann sind aber nach § 12 stets die Coordinaten $x \mid y$ von C

$$x = x_1 + d \cos \vartheta, \; y = y_1 + d \sin \vartheta,$$

also ausgedrückt mittelst der bekannten Grössen $x_2 | y_2$, ϑ und der völlig willkürliche Werte durchlaufenden Unbestimmten d. Die obige Gleichung entspringt aus dieser neuen Darstellung der laufenden Coordinaten durch Elimination von d aus beiden Relationen.

Ist ferner λ das Teilverhältnis des Punktes C in der festen Strecke AB, so ergeben sich die beiden Ausdrücke

$$-\lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2}, \; -\lambda = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

direct aus der Figur, infolge der Proportionen in ähnlichen Dreiecken. Umgekehrt gibt die Gleichsetzung des Abscissen- und des Ordinatenausdrucks für λ die frühere Gleichung der Verbindungsgeraden, aber in der symmetrischen Gestalt

$$(x - x_1)(y - y_2) = (x - x_2)(y - y_1),$$

welche nach Auflösung der Klammern das Product xy beiderseits, also nur scheinbar enthält.

Endlich aber lassen sich die beiden Ausdrücke für λ nach x und y auflösen und liefern die Formeln des § 4

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Die Coordinaten $x | y$ des Teilpunktes C sind also beide abhängig von einem Parameter λ, welcher in beiden Brüchen gleichzeitig denselben beliebigen Wert annimmt und das Teilverhältnis von C in der Strecke AB bedeutet. Die Umkehrung des Vorzeichens von λ liefert daher den zweiten Punkt D des zu AB harmonischen Paares CD. So hat z. B. für $\lambda = 1$ die Mitte M der Strecke die Coordinaten $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) | \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, dagegen für $\lambda = -1$ ihr unendlich ferner Punkt unendlich grosse Coordinaten von dem Verhältnis $y : x = (y_1 - y_2) : (x_1 - x_2) = m$ (§ 27).

B.: Man bestimme den Schwerpunkt eines Dreiecks $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$, $x_3 | y_3$ ($x_0 | y_0$ arithmetische Mittel).

§ 37. Der Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei gegebenen, sich in S schneidenden Geraden gleich sind, besteht aus den beiden Halbirungslinien der Winkel dieser Geraden. Haben wir die Normalgleichungen $x \cos \vartheta_1 + y \sin \vartheta_1 - n_1 = 0$, $x \cos \vartheta_2 + y \sin \vartheta_2 - n_2 = 0$ der Geraden und setzen $x_1 | y_1$ in ihre linken Seiten ein, so haben diese gleiche Werte, wenn $x_1 | y_1$ auf der Winkelhalbirenden liegt, welche den 0 enthaltenden Winkelraum durchsetzt (§ 31), dagegen entgegengesetzt gleiche Werte, wenn $x_1 | y_1$ auf der andern Halbirenden liegt. Um auszudrücken, dass $x_1 | y_1$ ein beliebiger Punkt in der betreffenden Winkelhalbirenden sei, schreiben wir wieder $x | y$ dafür. Somit ist die Gleichung einer Winkelhalbirenden

$$x \cos \vartheta_1 + y \sin \vartheta_1 - n_1 \mp (x \cos \vartheta_2 + y \sin \vartheta_2 - n_2) = 0,$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der den Nullpunkt enthaltende Winkelraum halbirt wird oder der Nebenwinkel.

Die Winkelhalbirenden sind zu einander normal. Denn ihre Richtungszahlen sind

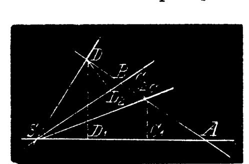
$$-\frac{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2} \text{ und } -\frac{\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2}$$

und deren Product ist -1.

B.: Man bilde die Gleichungen der Winkelhalbirenden zweier Geraden von allgemeinen Gleichungen, speciell zweier Vectorgeraden m, m'.

§ 38*. Suchen wir allgemeiner den Ort eines Punktes, dessen Abstände von den gegebenen Winkelschenkeln in einem vorgeschriebenen Verhältnis μ stehen. Setzen wir seine Coordinaten in die linken Seiten der Normalgleichungen ein, so ist die erstere gleich dem $+\mu$fachen oder $-\mu$fachen der letzteren. Also ist die Gleichung des Ortes

$$x \cos \vartheta_1 + y \sin \vartheta_1 - n_1 \mp \mu (x \cos \vartheta_2 + y \sin \vartheta_2 - n_2) = 0.$$



Diese Gleichungen sind vom ersten Grad und befriedigt durch ein Wertepaar, welches gleichzeitig beiden gegebenen Gleichungen genügt. Es sind also die Gleichungen zweier durch den Schnittpunkt S gehenden Geraden und zwar entspricht dem oberen Zeichen diejenige, welche den 0 enthaltenden Winkel teilt, dem unteren diejenige, welche die Nebenwinkel teilt.

Nun ist aber das Verhältnis der normalen Abstände $C_1 C$ und $C_2 C$ gleich dem Verhältnis $\mu = \sin ASC : \sin CSB$ und dieses nennt man das Sinusteilverhältnis des Strahls SC im Winkel ASB. Ganz ebenso ist $D_1 D : D_2 D = -\mu = \sin ASD : \sin DSB$ das negativ ausfallende Sinusteilverhältnis des Strahls SD im Winkel ASB. Hieraus folgt aber $C_1 C : D_1 D = - C_2 C : D_2 D = AC : AD = - BC : BD$. Somit sind die Schnittpunkte A, B und C, D der vier aus S gezogenen Strahlen paarweise harmonisch. Die Linienpaare SA, SB und SC, SD heissen selbst harmonisch, weil sie jede Transversale in harmonischen Punktepaaren schneiden.

B.: Ein Punkt P ist durch die Verhältniszahlen seiner Abstände a_1, a_2, a_3 von den Seiten ϑ_1, n_1; ϑ_2, n_2; ϑ_3, n_3 eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ völlig bestimmt. Denn die Teillinien $A_1 P$, $A_2 P$, $A_3 P$ der Dreieckswinkel sind durch $\mu = a_2 : a_3$, $a_3 : a_1$, $a_1 : a_2$ gegeben. Man bestimme die Abstände selbst mittelst der Relation $a_1 . A_2 A_3 + a_2 . A_3 A_1 + a_3 . A_1 A_2 = 2 . A_1 A_2 A_3$.

§ 39*. Sehen wir in den vorigen Ortsbestimmungen davon ab, die Normalabstände nach Vorzeichen zu unterscheiden, so können wir die gefundenen Paare von Geraden je durch eine Gleichung zweiten Grades definiren. Alle Punkte, für welche entweder $y : x = + m$ oder $y : x = - m$, also entweder $y - m x$ oder $y + m x$ gleich Null ist, haben auch $y^2 : x^2 = m^2$ oder $y^2 - m^2 x^2 = 0$. Also ist letztere die Gleichung beider symmetrischen Vectorgeraden zusammen.

Dasselbe ergibt sich auch, wenn wir den Ort eines Punktes suchen, dessen Abstand $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ vom Nullpunkt das μfache (z. B. Doppelte seines Normalabstands von einer Axe, z. B. seiner Abscisse x, beträgt. Denn aus $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \mu x$ folgt $x^2 + y^2 = \mu^2 x^2$ oder $y^2 = (\mu^2 - 1) x^2$, so dass die Richtungszahlen der beiden Vectorgeraden aus dem Verhältnis μ durch $m = \pm \sqrt{(\mu^2 - 1)}$ zu berechnen sind (z. B. $\mu = 2$, $m = \pm \sqrt{3}$). Ist $\mu = 1$, $m = 0$, so rücken die Vectorgeraden des Paares in die x-Axe $y^2 = 0$, für $\mu < 1$ gibt es keine reellen Ortsgeraden mehr.

§ 40. Sollen überhaupt drei Gerade durch denselben Punkt gehen, so müssen die Coordinaten $x_0 \mid y_0$ des Schnittpunktes S der beiden ersten die Gleichung der dritten befriedigen. Dazu braucht man jenes Wertepaar jedoch nicht zu berechnen. Denn die Gleichung einer durch S gehenden Geraden erhält man, indem man die linken Seiten der

gegebenen mit beliebigen Zahlen multiplicirt und sie dann addirt (combinirt). Denn auch diese Combination zweier Ausdrücke, welche für $x = x_0$, $y = y_0$ einzeln den Wert Null haben, erhält gleichzeitig den Wert Null. Daher stellt eine combinirte Gleichung

$$Ax + By + C - \mu (A'x + B'y + C') = 0,$$

für jeden willkürlichen Wert der Unbestimmten μ eine Gerade dar, welche durch den Schnittpnnkt der Geraden geht

$$Ax + By + C = 0, \ A'x + B'y + C' = 0.$$

Die Gesamtheit derselben bildet das Strahlenbüschel am Scheitel S.

Umgekehrt ist jede Gerade des Büschels S durch eine Gleichung darzustellen, welche die Gleichungen zweier Geraden desselben combinirt. Denn, soll sie durch einen gegebenen Punkt gehen, so genügt diese lineare Bedingung (§ 35) zur Bestimmung des Wertes von μ. So wird z. B. die Gleichung der nach dem Nullpunkt gehenden Geraden des Büschels ($\mu = C : C'$) $C'(Ax + By + C) - C(A'x + B'y + C') = 0$. Und soll die Gerade ein vorgeschriebenes Sinusteilverhältnis μ' machen, so lautet ihre Gleichung, aus den Normalgleichungen des § 38 combinirt,

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \mu' \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} = 0.$$

B.: Man beweise analytisch, dass sich in je einem Punkte schneiden: 1) die Mittellinien, 2) die Höhen, 3) die Mittelnormalen, 4) die Winkelhalbirenden eines Dreiecks, und dass die drei ersten Schnittpunkte in einer Geraden liegen. Man nehme etwa eine Seite und ihre Mittelnormale zu Axen. Sind jedoch die Ecken durch $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$, $x_3 | y_3$ gegeben, so beachte man die cyclischen Übergänge zwischen den Gleichungen.

§ 41*. Die Resultate, welche sich auf allgemeine Gleichungsformen und Lageneigenschaften beziehen, die Längen und Winkel nicht enthalten, lassen sich leicht auch dem Gebrauch schiefer Coordinaten anpassen. Auch jede Gleichung ersten Grades zwischen schiefen Coordinaten ist die Gleichung einer Geraden. Denn der Neigungstransformation des § 19 zufolge entsteht aus

$$AX + BY + C = 0$$

nach Multiplication mit $\sin \omega$ eine Gleichung ersten Grades in rechtwinkligen Coordinaten

$$A(x \sin \omega - y \cos \omega) + By + C \sin \omega = 0.$$

Daher ist die Richtungszahl $tg\, \alpha = - A \sin \omega : (B - A \cos \omega)$ und eine leichte Umrechnung ergibt, dass das Coefficientenverhältnis

$$M = A : B = \sin \alpha : \sin (\omega - \alpha)$$

das Sinusteilverhältnis der parallelen Vectorgeraden im Axenwinkel ist. Eine Vectorgerade hat stets eine Gleichung $AX + BY = 0$ oder $y = Mx$. Ganz unverändert in ihrem Bau tritt die symmetrische Gleichung auf. Denn wie früher wird geschlossen, dass die Verhältnisse $-C : A$ und $-C : B$ die Abschnitte h und k bedeuten, welche die Gerade auf den schiefen Axen macht.

In Geltung bleiben die Betrachtungen über die durch Angabe eines Punktes $X_1 | Y_1$ einer Geraden entstehende lineare Bedingung für A, B, C (§ 35). Also ist die Gleichung einer durch jenen gehenden Geraden

$$Y - Y_1 = M(X - X_1)$$

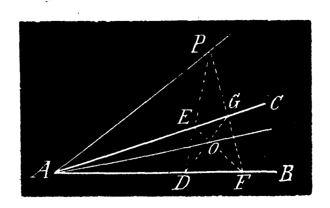
und die Gleichung der Verbindungsgeraden (§ 27) bleibt völlig unverändert. Ebenso stellt jede aus zwei gegebenen combinirte Gleichung eine durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden gehende dritte dar.

Erwähnt sei noch, wie sich die Normalgleichung ändert. Aus den rechtwinkligen Dreiecken ONA, ONB folgt $n = h \cos \vartheta = k \cos(\omega - \vartheta)$, aus der symmetrischen Gleichung also

$$x \cos \vartheta + y \cos(\omega - \vartheta) - n = 0$$

als Normalgleichung. Somit ist die Gleichung einer Normalen jener Geraden $x \sin \vartheta - y \sin(\omega - \vartheta) - n' = 0$.

§ 42*. Zwei feste Gerade AB, AC und zwei durch einen festen Punkt P gehende Transversalen schneiden sich in vier Punkten D, E, F, G, deren Verbindungsgeraden DG und EF sich auf der Geraden AO schneiden, welche mit AP ein zu den festen Geraden harmonisches Geradenpaar bildet.



Dieser Satz gibt ein allgemeines Mittel, zu einer Geraden AP die in Bezug auf AB, AC harmonische Gerade AO zu construiren. Man nennt die Figur der sechs Verbindungsgeraden der Punkte D, E, F, G ein vollständiges Viereck.

Zum Beweise nehme man die festen Geraden als Axen schiefer Coordinaten und setze $AD = h$, $AE = k$; $AF = h'$, $AG = k'$. Dann sind die Gleichungen der Geraden DE, FG, DG, FE der Reihe nach

$$\frac{X}{h} + \frac{Y}{k} = 1, \ \frac{X}{h'} + \frac{Y}{k'} = 1, \ \frac{X}{h} + \frac{Y}{k'} = 0, \ \frac{X}{h'} + \frac{Y}{k} = 0,$$

und aus den letzteren folgt die Gleichung von AO als

$$\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h'}\right) X + \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k}\right) Y = 0.$$

Nun müssen aber DE und FG durch den Punkt P $(X' \mid Y')$ gehen. Also ist

$$\frac{X'}{h} + \frac{Y'}{k} = 1, \ \frac{X'}{h'} + \frac{Y'}{k'} = 1, \ \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h'}\right) X - \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k}\right) Y' = 0.$$

Dann sind die beiden eingeklammerten Differenzen zu Y' und X' proportional, und die Einsetzung in die Gleichung von AO liefert

$$Y'X + X'Y = 0, \text{ während } Y'X - X'Y = 0$$

die Gerade AP darstellt. Daher ist der Ort des Punktes O die Vectorgerade der Richtungszahl $-m$, wenn $Y' : X' = m$ ist. Also hängt der Ort von O nicht davon ab, wo der Punkt P in der Geraden von der Richtungszahl m angenommen ist.

B.: In einem vollständigen Vierseit liegen die Mitten der drei Diagonalen in einer Geraden. Im Vierseit der Geraden DF, EG, DE, FG heissen Diagonalen DG, EF, AP.

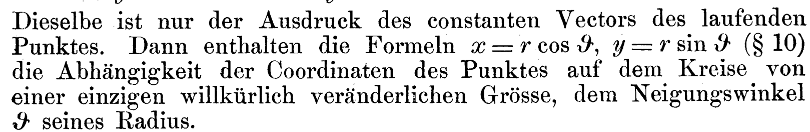
III. Der Kreis.

§ 43. Der Kreis ist der Ort eines Punktes, welcher von einem festen Punkt M, dem Mittelpunkt, constanten Abstand gleich dem Radius r hat. Er ist daher durch r und die Coordinaten $a \mid b$ von M bestimmt. Jeder Punkt $x \mid y$ der Kreislinie genügt der Gleichung, welche das Quadrat des Ausdruckes für den Abstand MP gleich r^2 setzt:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \text{ oder } (x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.$$

Die letztere heisst Normalgleichung des Kreises bei allgemeiner Lage. Geht insbesondere der Kreis durch den Nullpunkt und liegt sein Mittelpunkt auf der Abscissenaxe, so wird sie wegen $a=r$, $b=0$ zur sog. Scheitelgleichung

$$x^2+y^2-2\,r\,x=0.$$



Ein Kreis, der den Nullpunkt zum Centrum hat ($a=0$, $b=0$), hat die specielle Normalgleichung

$$x^2+y^2=r^2 \text{ oder } x^2+y^2-r^2=0.$$

Dieselbe ist nur der Ausdruck des constanten Vectors des laufenden Punktes. Dann enthalten die Formeln $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$ (§ 10) die Abhängigkeit der Coordinaten des Punktes auf dem Kreise von einer einzigen willkürlich veränderlichen Grösse, dem Neigungswinkel ϑ seines Radius.

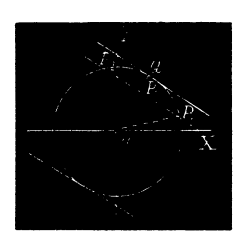
Aus diesen speciellen Darstellungen ergibt sich die allgemeinere durch blosse Verschiebungstransformation, also indem man die specielleren Formeln mit den Veränderlichen $x' \mid y'$ schreibt und diese dann durch $x-a \mid y-b$ ersetzt. Daher können die Eigenschaften eines Kreises vollständig an einem Kreise specieller Lage untersucht werden.

§ 44. Die Gleichung $x^2+y^2=r^2$ zeigt, dass nur zu Werten einer Coordinate, deren Quadrat nicht grösser als r^2 ist, reelle Werte der andern gehören (§ 21). Letztere sind zu gegebenem x aus $y=\pm\sqrt{(r^2-x^2)}$, zu gegebenem y aus $x=\pm\sqrt{(r^2-y^2)}$ zu berechnen, sind also im allgemeinen entgegengesetzt gleich. Wenn der Punkt $x \mid y$ dem Kreise angehört, so gilt dies auch für die Punkte $x \mid -y$, $-x \mid y$ und $-x \mid -y$, weil die Gleichung nur die Quadrate der Veränderlichen enthält. Der Kreis ist also in Bezug auf jede Axe (und auf den Mittelpunkt) symmetrisch, überhaupt in Bezug auf jeden Durchmesser. Denn bei jeder Drehungstransformation, welche neue Axen einführt, bleibt die Kreisgleichung von derselben Form (§ 14).

Ist $r=0$, so kann die Gleichung $x^2+y^2=0$ durch keine von Null verschiedenen reellen Werte der Coordinaten befriedigt werden, sondern nur durch $x=0$, $y=0$. Sie scheint so die Gleichung eines blossen Punktes, des Nullpunktes, zu sein; jedoch darf dieser nur dann so dargestellt werden, wenn er eben als ein unendlich kleiner Kreis betrachtet werden soll. Wir nennen daher $x^2+y^2=0$ die Gleichung des Nullkreises. Die Gleichung $x^2+y^2+a^2=0$ ist überhaupt nicht durch reelle Coordinaten zu befriedigen.

§ 45. Wir suchen nun die **Schnittpunkte des Kreises** $x^2 + y^2 = r^2$ **mit einer Geraden.** Ist diese von der Normalgleichung $x \cos \alpha + y \sin \alpha = n$, so hat man nur aus beiden Gleichungen Wertepaare x, y als Unbekannte zu berechnen. Die Elimination von y, bezw. von x liefert

$$x = n \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{r^2 - n^2}, \quad y = n \sin \alpha \mp \cos \alpha \sqrt{r^2 - n^2}.$$



Dabei müssen je die beiden Werte mit dem oberen, oder beide mit dem unteren Vorzeichen zusammengenommen werden, um, eingesetzt in die Gleichung der Geraden, diese zu befriedigen. Seien erstere die Coordinaten $x_1 \mid y_1$, letztere $x_2 \mid y_2$.

Dieselben sind nur reell, so lange n nicht grösser ist als r. Eine Gerade, deren Centralabstand $n < r$ ist, schneidet also den Kreis in zwei Punkten. Sie heisst dann eine **Secante**, die vom Kreise in ihr begrenzte Länge $2s$ die **Sehne**; für diese ergibt sich leicht (z. B. nach § 11) $2\sqrt{r^2 - n^2}$. Eine Gerade, deren Centralabstand gleich dem Radius ist, hat mit dem Kreise nur einen Punkt $x_1 = r \cos \alpha$, $y_1 = r \sin \alpha$ gemein, den Fusspunkt des normalen Radius. Jede solche Gerade heisst **Tangente des Kreises**, der Peripheriepunkt ihr Berührungspunkt. Umgekehrt wird der Kreis von allen Geraden, die den normalen Abstand r vom Centrum haben, **berührt und eingehüllt.** Endlich hat eine Gerade, für welche $n > r$ ist, keinen Schnittpunkt mit dem Kreise.

B.: Durch einen gegebenen Punkt (z. B. $c \mid 0$) eine Secante von vorgeschriebener Sehne $2s$ zu ziehen. Der Abstand der Geraden vom Centrum muss $\sqrt{(r^2 - s^2)}$ betragen.

§ 46. Nun geben die arithmetischen Mittel je beider Wurzeln

$$x_0 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = n \cos \alpha, \quad y_0 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = n \sin \alpha$$

für eine Secante die Sehnenmitte $x_0 \mid y_0$. Es ist also $y_0 : x_0 = tg\, \alpha$, das Coordinatenverhältnis der Sehnenmitte P_0, nur von der Richtung, nicht vom Abstande n der Secante abhängig, und gleich der Richtungszahl ihrer Normalen. **Daher liegen die Mitten aller parallelen Sehnen auf dem zu ihnen normalen Kreisdurchmesser** $y = x\, tg\, \alpha$.

Wird die Secante vom Mittelpunkt weg parallel sich selbst verschoben, so dass die Sehne kleiner wird, so nähern sich beide Schnittpunkte einem Endpunkte Q des normalen Durchmessers. Sie fallen **gleichzeitig** mit demselben zusammen, wenn die Sehne Null ist. Also ist dieser Punkt der Berührungspunkt einer Tangente, die zu den Secanten parallel ist. **Die Normalgleichung der im Endpunkte Q des Radius von der Neigung α berührenden Tangente ist**

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - r = 0.$$

Die auf dem Radius von der Neigung $180 + \alpha$ berührende Tangente ist der vorigen parallel.

Es gibt umgekehrt zwei Tangenten von vorgeschriebener Richtung. Denn setzen wir $m = -ctg\, \alpha$, so folgen als ihre Gleichungen

$$m x - y \mp r \sqrt{1 + m^2} = 0 \quad \text{oder} \quad y = m x \pm r \sqrt{1 + m^2}.$$

§ 47. Die allgemeine Gleichung der Tangente des Kreises $x^2+y^2=r^2$ im Berührungspunkte $x_1 | y_1$ lautet

$$x_1 x + y_1 y - r^2 = 0 \text{ oder } x_1 x + y_1 y = r^2.$$

Sie entsteht durch Multiplication der vorigen Normalgleichung mit r, da alsdann $r \cos\alpha = x_1$, $r \sin\alpha = y_1$ die Coordinaten des Berührungspunktes sind.

Sie ist leicht zu merken infolge ihrer Ähnlichkeit mit der Kreisgleichung selbst: die Quadrate der laufenden Coordinaten sind durch die Producte einer laufenden und einer festen Coordinate ersetzt. Dass eine solche Gleichung mit der Kreisgleichung nur ein gemeinsames Wurzelpaar besitzt, bestätigt man leicht so. Ist $x | y$ ein Schnittpunkt des Kreises $x^2+y^2-r^2=0$ mit der Tangente $x_1 x + y_1 y - r^2 = 0$, so erfüllen seine Coordinaten diese Gleichungen, während überdies $x_1^2+y_1^2-r^2=0$ ist. Also ist auch $(x^2+y^2-r^2)-2(x_1 x+y_1 y-r^2) + (x_1^2+y_1^2-r^2)=0$ befriedigt, d. h. es gilt auch die Gleichung $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=0$, welche aber nur das reelle Wurzelpaar $x=x_1$, $y=y_1$ besitzt (§ 44).

Durch Transformation findet man, dass die Tangenten des Kreises $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ die Gleichung haben

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2.$$

§ 48*. Überhaupt gilt die Definition: Eine Secante mit zwei zusammenfallenden Schnittpunkten heisst Tangente. Daraus entspringt noch folgende Ableitung der Tangentengleichung. Sind $x_1 | y_1$ und $x_2 | y_2$ zwei beliebige Punkte der Kreislinie, so ist ihre Verbindungsgerade eine Secante von der Richtungszahl $m=(y_2-y_1):(x_2-x_1)$. Denkt man sich die Secante um den ersten Punkt gedreht, so dass sich der zweite ihm nähert, so gibt es schliesslich eine Grenzlage, in welcher beide vereinigt sind, während sie sich bei der geringsten Drehung wieder trennen. Nun erfordert dies aber $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ zu setzen, wofür m anscheinend unbestimmt wird. Daher ist für m ein anderer Coordinatenausdruck zu suchen, welcher einem bestimmten Grenzwert zustrebt. Einen solchen bietet die geometrische Überlegung, dass der die Sehne halbirende Radius zu ihr normal ist, also seine Richtungszahl $y_0 : x_0 = -1 : m$ sein muss (§ 46). Dasselbe liefert aber die rein rechnerische Umformung mit Hülfe der Relationen $x_1^2+y_1^2=r^2$, $x_2^2+y_2^2=r^2$, nämlich $y_2^2-y_1^2=x_1^2-x_2^2$ oder $(y_2-y_1):(x_2-x_1) = -(x_1+x_2):(y_1+y_2)=-x_0:y_0$.

Also ist die Gleichung der Secante $P_1 P_2$ des Kreises

$$y-y_1=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1)=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_1),$$

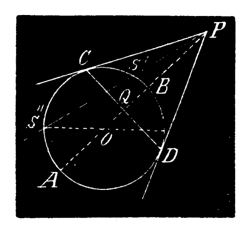
und diese geht für $x_2=x_1=x_0$, $y_2=y_1=y_0$ über in die Gleichung der Tangente in P_1

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1) \text{ oder } x_1 x + y_1 y = x_1^2+y_1^2,$$

wo noch $x_1^2+y_1^2=r^2$ zu berücksichtigen ist.

§ 49. Wir betrachten ferner die Secanten, welche durch einen beliebigen Punkt $P\,(x_1 | y_1)$ der Ebene gehen. Dann sind die Coordinaten $x | y$ eines Punktes S, der durch die Strecke PS von der Länge d und der Neigung ϑ bestimmt ist, gegeben (§ 36) als $x = x_1 + d\cos\vartheta$,

$y = y_1 + d \sin \vartheta$. Ist insbesondere S ein Punkt der Kreislinie, so befriedigen d und ϑ die durch Einsetzung dieser Binome umgeformte Kreisgleichung



$(x_1 + d \cos \vartheta)^2 + (y_1 + d \sin \vartheta)^2 - r^2 = 0$ oder $d^2 + 2(x_1 \cos \vartheta + y_1 \sin \vartheta)\, d + x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$. Zu jedem Werte von ϑ gibt die Auflösung der Gleichung nach d im allgemeinen zwei Wurzeln $PS' = d'$, $PS'' = d''$, deren Product $\mathfrak{P}$ stets unabhängig von ϑ ist, nämlich

$$\mathfrak{P} = d'\,d'' = x_1^2 + y_1^2 - r^2.$$

Dieser Wert, welchen die linke Seite der Normalgleichung annimmt, wenn die Coordinaten $x_1 \mid y_1$ des gewählten Punktes statt $x \mid y$ eingesetzt werden, wird als die Potenz $\mathfrak{P}$ des Punktes P in Bezug auf den Kreis bezeichnet. Die geometrische Deutung von $\mathfrak{P} = d'\,d''$ gibt den Satz: Das Product der durch einen Kreis auf beliebigen Secanten eines festen Punktes abgeschnittenen und von diesem aus gezeichneten Strecken ist constant.

§ 50. Jede reelle positive Wurzel d gibt die Länge einer Strecke von der Neigung ϑ. Um eine reelle negative Wurzel zu deuten, bedenken wir, dass ihr positiver Wert der Gleichung genügt, in welcher das Vorzeichen des Factors von d entgegengesetzt ist; dies wird aber bewirkt, indem $180 + \vartheta$ statt ϑ als Neigungswinkel der zugehörigen Strecke genommen wird.

Ist nun das Product $d'\,d''$ negativ, so sind die Wurzeln bekanntlich stets reell, aber von verschiedenen Vorzeichen, d. h. jede Secante durch P schneidet den Kreis so, dass P selbst auf der Sehne $S'S''$ liegt. Für jeden Punkt Q innerhalb des Kreises ist also die Potenz $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Kreis negativ, z. B. für das Centrum $(x_1 = 0, y_1 = 0)$ das negative Radiusquadrat $-r^2$. Überhaupt ist dann $\sqrt{-\mathfrak{P}}$ eine reelle Zahl, welche die halbe Länge s der im Punkte Q halbirten Sehne des Kreises angeben muss, weil $OQ = \sqrt{r^2 - s^2}$ folgt.

Ist dagegen das Product $d'\,d''$ positiv, so haben die Wurzeln d', d'', falls sie reell sind, gleiche Vorzeichen, d. h. P liegt ausserhalb der Sehne $S'S''$, also auch des Kreises. Für jeden Punkt P ausserhalb des Kreises ist also die Potenz $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Kreis positiv und $\sqrt{\mathfrak{P}} = t$ reell. Dann ist $OP = \sqrt{r^2 + t^2}$, d. h. r und t sind Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck über OP. Also ist t die Länge der aus dem Punkte P an den Kreis gelegten Tangenten, bis zum Berührungspunkt C oder D. Die Potenz eines äusseren Punktes ist gleich dem Quadrat seiner Tangentenlänge. Offenbar liefern nur die zwischen den Tangenten enthaltenen Secanten reelle Schnittpunkte.

Die Potenz ist endlich Null dann und nur dann, wenn der Punkt $x_1 \mid y_1$ auf der Kreislinie selbst liegt, also $x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$ ist. So bietet der Ausdruck $\mathfrak{P}$ ein einfaches Mittel zu entscheiden, wie ein durch seine Coordinaten gegebener Punkt zum Kreise liegt.

B.: Verlangt ist der Ort der Sehnenmitten in den Secanten durch einen Punkt, z. B. $c \mid 0$. Es ist $\frac{1}{2}(d' + d'') = -c \cos \vartheta$, also $x = c \sin^2 \vartheta$, $y = -x\, ctg\, \vartheta$, also, durch Elimination von ϑ, $x^2 + y^2 = c\,x$.

§ 51. Die Gleichung $x_1 x + y_1 y - r^2 = 0$ des § 47 stellt auch dann noch eine dem Punkte $P(x_1 | y_1)$ zugeordnete Gerade p dar, wenn P nicht auf der Kreislinie liegt. Diese Gerade p ist stets normal zu dem durch P gehenden Durchmesser, denn (§ 24) die Richtungszahl von p ist $-x_1 : y_1$. Daher hat man nur den Schnittpunkt $Q(x_2 | y_2)$ von p mit diesem Durchmesser zu ermitteln. Seine Coordinaten folgen aus den Gleichungen $x_1 x + y_1 y = r^2$ der Geraden, $y_1 x = x_1 y$ des Durchmessers als

$$x_2 = \frac{r^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2},\ y_2 = \frac{r^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Nun ergibt sich hieraus $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = r^2 : \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ oder $OQ = r^2 : OP$. Also findet man den Vector des Schnittpunktes Q aus

$$OP : r = r : OQ \text{ oder } OP \, . \, OQ = r^2 = AO \, . \, OB.$$

Damit ist aber P, Q als ein Paar harmonischer Teilpunkte des Durchmessers AB definirt (§ 5).

Man nennt die Gerade p der Gleichung $x_1 x + y_1 y - r^2 = 0$ die Polare des Punktes $P(x_1 | y_1)$ in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ und den Punkt P den Pol der Geraden p. Demnach wird die Polare p eines Punktes erhalten als diejenige Normale des nach dem Pole P gehenden Kreisdurchmessers, welche denselben mit P harmonisch teilt. Der Pol einer Geraden teilt umgekehrt den zu dieser normalen Durchmesser harmonisch mit dem Fusspunkt desselben. Der Pol einer beliebigen Geraden $Ax + By + C = 0$ hat die Coordinaten $x_1 = kA$, $y_1 = kB$, wenn k so gewählt ist, dass $-kC = r^2$ ist.

Liegt der Pol jedoch auf dem Kreise, so erweist sich als seine Polare, infolge der Übereinstimmung der Gleichungen, seine Tangente. Umgekehrt ist der Pol einer Tangente ihr Berührungspunkt.

§ 52. Nun folgt aus $OP \, . \, OQ = r^2$ für $OP > r$, $OQ < r$, d. h. die Polare eines ausserhalb des Kreises liegenden Pols schneidet den Kreis; für $OP = r$, $OQ = r$, d. h. die Polare eines auf dem Kreise liegenden Pols P berührt den Kreis in P, ist also Tangente; und für $OP < r$, $OQ > r$, d. h. die Polare eines innerhalb des Kreises liegenden Punktes schneidet den Kreis nicht (vgl. § 50).

Von einem äusseren Punkte $x_1 | y_1$ gehen also zwei Tangenten an den Kreis und zwar sind die Schnittpunkte $x' | y'$, $x'' | y''$ seiner Polaren die Berührungspunkte derselben. Die Polare wird als ihre Verbindungslinie kurz als die zugehörige Berührungssehne bezeichnet. Denn die Tangenten in $x' | y'$ und $x'' | y''$ haben die Gleichungen $x'x + y'y = r^2$, $x''x + y''y = r^2$; daher sagen die Relationen $x'x_1 + y'y_1 = r^2$, $x''x_1 + y''y_1 = r^2$ nicht nur aus, dass $x' | y'$, $x'' | y''$ in der Polaren $x_1 x + y_1 y = r^2$ liegen, sondern auch, dass $x_1 | y_1$ in den Tangenten liegt. Die Gleichungen der beiden Tangenten erhält man daher, indem man die Coordinaten $x' | y'$ und $x'' | y''$ als Wurzeln von $x_1 x + y_1 y = r^2$, $x^2 + y^2 = r^2$ berechnet und einsetzt. Dagegen rücken die beiden Tangenten in eine zusammen, wenn der Pol auf den Kreis fällt.

Die Polare eines unendlich fernen Punktes in der Richtung $y_1 : x_1 = m$ ist der normale Durchmesser. Denn, dividiren wir die Polarengleichung durch x_1, setzen dann $1 : x_1 = 0$, so geht sie über in $x + my = 0$.

§ 53*. Die harmonische Lage der Punkte P und Q (§ 51) veranlasst die Frage: Wie müssen überhaupt zwei Punkte P_1 $(x_1|y_1)$ und P_2 $(x_2|y_2)$ auf einer Secante $S'S''$ liegen, damit P_1, P_2 und die Sehnenendpunkte $x'|y'$, $x''|y''$ harmonische Paare bilden? Offenbar muss es dann ein Teilverhältnis λ so geben, dass

$$x' = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y' = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\ x'' = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda},\ y'' = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$$

gesetzt werden kann. Die Einsetzung dieser Werte in $x^2 + y^2 = r^2$ ergibt dann

$$(x_1 \pm \lambda x_2)^2 + (y_1 \pm \lambda y_2)^2 - (1 \pm \lambda)^2 r^2 = 0 \text{ oder}$$
$$(x_1^2 + y_1^2 - r^2) \pm 2\lambda (x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2) + \lambda^2 (x_2^2 + y_2^2 - r^2) = 0.$$

Diese Gleichungen können aber nur dann für denselben Wert λ bestehen, wenn das zweite Glied wegfällt, d. h. wenn die Relation gilt

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2 = 0.$$

Zwei Punkte P_1, P_2, deren Coordinaten $x_1|y_1$, $x_2|y_2$ diese Relation erfüllen, werden wir kurz als durch den Kreis harmonisch getrennt bezeichnen. Ist einer von ihnen $(x_1|y_1)$ fest, so ist der Ort der sämtlichen durch den Kreis von ihm harmonisch getrennten Punkte die Polare $x_1 x + y_1 y = r^2$. Daher ist die Polare eines unendlich fernen Punktes der die parallelen Sehnen halbirende Durchmesser.

§ 54*. Nun sagt aber die Bedingung $x_1 x_2 + y_1 y_2 = r^2$ aus, dass gleichzeitig der Punkt P_2 in der Polaren $x_1 x + y_1 y = r^2$ von P_1 und auch P_1 in der Polaren $x_2 x + y_2 y = r^2$ von P_2 liegt. Also gehen die Polaren aller Punkte einer beliebigen Geraden durch den Pol dieser Geraden. Umgekehrt liegen die Pole aller durch einen beliebigen Punkt gehenden Geraden in der Polaren dieses Punktes. Da nun z. B. die Pole der Durchmesser unendlich fern sind, so ist die unendlich ferne Gerade, die sie erfüllen, die Polare des Mittelpunktes. Einsetzung von $0|0$ gibt als ihre Gleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y - r^2 = 0$, die nur durch $x = \infty$, $y = \infty$ erfüllbar ist.

Man kann ferner Dreiecke bilden, in welchen jede Ecke die Gegenseite zur Polaren hat. Nimmt man nämlich eine Ecke P_1 willkürlich an, die zweite P_2 beliebig in der Polaren von P_1, und die dritte P_3 als den Schnittpunkt derselben mit der Polaren von P_2, so ist $P_1 P_2$ von selbst die Polare von P_3. Das Dreieck dreier Punkte, deren Coordinaten die Bedingungen erfüllen $x_1 x_2 + y_1 y_2 = r^2$, $x_2 x_3 + y_2 y_3 = r^2$, $x_3 x_1 + y_3 y_1 = r^2$, heisst ein Polardreieck in Bezug auf den Kreis.

§ 55. Entwickelt man die Normalgleichung des Kreises vom Centrum $a|b$ und Radius r, so ist das constante Glied $c = a^2 + b^2 - r^2$ und bedeutet die Potenz des Nullpunktes (§ 50). Die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

ist vom zweiten Grade, hat aber zwei besondere Merkmale. Während nämlich drei verschiedene Glieder zweiten Grades x^2, xy, y^2 mit willkürlichen Coefficienten möglich sind, haben in der Kreisgleichung die Quadrate x^2 und y^2 denselben Coefficienten und ein Glied mit dem Product xy fehlt ganz.

Umgekehrt kommt jede Gleichung zweiten Grades

$$D(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0,$$

deren höchste Glieder nur aus (x^2+y^2) mit einem Factor bestehen, durch Division durch D $(D \gtrless 0)$ auf obige Form zurück, wenn man setzt $a=-A:2D$, $b=-B:2D$, $c=C:D$. Diese Gleichung stellt aber nur dann einen reellen Kreis vom Centrum $a \mid b$ und der Potenz c von O dar, wenn $r^2=a^2+b^2-c=(A^2+B^2-4CD):4D^2$ eine positive Zahl ist. Also muss sein

$$c<a^2+b^2 \text{ oder } 4CD<A^2+B^2,$$

eine Bedingung, die jedoch für $c=0$ oder $c<0$ stets erfüllt ist.

Speciell für $c=a^2+b^2$ oder $4CD=A^2+B^2$ entsteht der Nullkreis um $a \mid b$. Dagegen werden für $D=0$ sowol a, b als r unendlich gross und die Gleichung reducirt sich auf $Ax+By+C=0$. Also kann eine Gerade als der im Endlichen gelegene Teil eines unendlich grossen Kreises mit unendlich fernem Mittelpunkt gelten. Bei $C=0$ geht der Kreis durch den Nullpunkt, bei $A=0$ oder $B=0$ liegt das Centrum auf einer Axe.

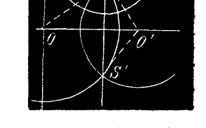
§ 56*. Die Normalgleichung des Kreises ist durch drei Constanten a, b, r oder a, b, c bestimmt. Auch die allgemeinste Gleichung hängt nur von den Verhältnissen dreier Coefficienten zum vierten ab (§ 55). Ein Kreis kann daher im allgemeinen drei verschiedenen Bedingungen genügen, denn ihre analytische Fassung ergibt drei Gleichungen zur Ermittelung der Coefficienten a, b, c seiner Gleichung.

So ist ein Kreis durch drei Peripheriepunkte festgelegt, so dass zwei verschiedene Kreise nicht mehr als zwei Punkte gemein haben können. Denn setzen wir nach einander deren Coordinatenpaare in die Normalgleichung ein, so erhalten wir drei Gleichungen ersten Grades für a, b, c. Soll z. B. der Kreis $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ durch O gehen und die Sehnen h und k auf den Axen abschneiden, so gibt Einsetzung von $0 \mid 0$, $h \mid 0$, $0 \mid k$ die Bedingungen $c=0$, $h^2-2ah=0$, $k^2-2bk=0$, woraus die gesuchte Gleichung als $x^2+y^2-hx-ky=0$ folgt.

Die Angabe eines Peripheriepunktes ist demnach eine lineare Bedingung für den Kreis im Sinne von § 35. Eine andere Art linearer Bedingung wird sich noch in § 58 ergeben. Dagegen ist die Bedingung, dass ein Kreis eine gegebene Gerade berühre, nicht linear. Denn, wäre diese durch n, ϑ gegeben (§ 29), so müsste sein $(a\cos\vartheta+b\sin\vartheta-n)^2=r^2=a^2+b^2-c$, eine Bedingung zweiten Grades für a, b.

§ 57. Um die Beziehungen zweier Kreise zu untersuchen, sei das Centrum O des grösseren im Nullpunkt, das des kleineren O' auf der Abscissenaxe in der Centraldistanz $OO'=d$ angenommen. Aus ihren Gleichungen $x^2+y^2-r^2=0$, $(x-d)^2+y^2-r'^2=0$ $(r>r')$ folgen dann die Coordinaten $x_s \mid y_s$ ihrer beiden Schnittpunkte. Bildet man nämlich die Differenz der Gleichungen, so gibt dieselbe

$$2dx_s=d^2+r^2-r'^2$$



und die Einsetzung in die erste

$$2dy_s=\pm\sqrt{4d^2r^2-(d^2+r^2-r'^2)^2} \text{ oder}$$

$$2dy_s=\pm\sqrt{(r+r'+d)(r+r'-d)(r-r'+d)(r'-r+d)}.$$

Also schneiden sich die Kreise in zwei zur Centralen symmetrisch gelegenen Punkten S, S', wenn der Wurzelausdruck reell ist. Dies ist aber der Fall, wenn jeder der drei letzten Factoren unter dem letzten Wurzelzeichen positiv ist, da

die Annahme zweier negativer Factoren zu Widersprüchen führt. Jene Bedingungen sagen aber aus, dass die Summe je zweier der drei Grössen r, r', d grösser ist als die dritte ($r + r' > d$, $r - r' < d$). Die Kreise schneiden sich also, wenn sich aus Radien und Centraldistanz ein Dreieck bilden lässt. Hat aber irgend einer der Factoren der Wurzel den Wert Null, so fallen auch die beiden Werte y_s zusammen in $y_s = 0$. Man spricht dann nicht mehr von einem Schnitt, sondern von einer Berührung der Kreise. Wenn $d = r + r'$ oder $d = r - r'$ ist, so berühren sich die Kreise in einem Punkte der Centralen und zwar äusserlich oder innerlich.

Die Kreise haben keine gemeinsamen Punkte, wenn einer der Factoren von y_s negativ wird. Und zwar liegen sie bei $r + r' < d$ ganz ausser einander, dagegen liegt bei $r - r' > d$ der eine innerhalb des andern. Insbesondere sind die Kreise für $d = 0$ concentrisch und haben im Endlichen keine reellen Schnittpunkte.

§ 58. Schneiden sich die Kreise in S, S', so ist der d gegenüberliegende Winkel des Dreiecks OSO' das Supplement des Schnittwinkels δ, d. h. des Winkels der Tangenten beider Kreise im Schnittpunkt. Nach dem Cosinussatze ist daher

$$d^2 = r^2 + r'^2 + 2 r r' \cos \delta \quad \text{oder} \quad \cos \delta = \frac{d^2 - r^2 - r'^2}{2 r r'}.$$

Berührung entsteht wieder für $\delta = 0$ oder $\delta = 180°$, d. h. $\cos \delta = \pm 1$. Die Kreise heissen zu einander orthogonal, wenn δ ein Rechter ist. Alsdann muss die Orthogonalitätsbedingung erfüllt sein $d^2 = r^2 + r'^2$.

Sind nun allgemeiner die beiden Kreise gegeben durch

$$x^2 + y^2 - 2 a x - 2 b y + c = 0, \quad x^2 + y^2 - 2 a' x - 2 b' y + c' = 0,$$

so ist $d^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2$, $r^2 = a^2 + b^2 - c$, $r'^2 = a'^2 + b'^2 - c'$. Also wird die Orthogonalitätsbedingung einfach

$$a a' + b b' = \tfrac{1}{2}(c + c').$$

Die Gleichung eines zum ersten orthogonalen Kreises lautet daher

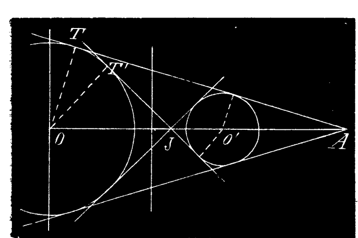
$$x^2 + y^2 - 2 a' (x - a) - 2 b' (y - b) - c = 0,$$

wo nur $a' \mid b'$ willkürlich ist. Jedoch muss noch

$$a'^2 + b'^2 > 2 a' a + 2 b' b - c$$

oder $(a' - a)^2 + (b' - b)^2 > a^2 + b^2 - c$, d. h. $d^2 > r^2$ sein (§ 55).

§ 59*. Zwei Kreise O, O' besitzen bekanntlich auch gemeinsame Tangenten, deren auf der Centralen gelegene Schnittpunkte als Ähnlichkeitscentra der Kreise bezeichnet werden. Letztere findet man aus ähnlichen Dreiecken, welche parallele Radien zu Seiten haben, als die Punkte A und J, welche die Strecke OM der Centra äusserlich und innerlich im Verhältnis $\pm \lambda = r : r'$ der Radien teilen. Daher sind die Abscissen x_a und x_i dieser Ähnlichkeitscentra A und J



$$x_a = \frac{d r}{r - r'} \quad \text{und} \quad x_i = \frac{d r}{r + r'}.$$

Angenommen $r > r'$, $d > 0$, so ist $x_a > d > x_i > 0$, d. h. die Reihenfolge der Punkte in der Centralen ist O, J, O', A, und zwar ist $x_i > r$, so lange $r + r' < d$; $x_a < r$, so lange

$r - r' > d$. Somit liegt das innere Ähnlichkeitscentrum J nur bei ausser einander liegenden Kreisen ausserhalb derselben, das äussere Ähnlichkeitscentrum A nur bei in einander liegenden Kreisen innerhalb derselben. Bei $r + r' = d$ ist $x_i = r$, bei $r - r' = d$ ist $x_a = r$, d. h. bei äusserer Berührung liegt J, bei innerer liegt A im Berührungspunkt.

§ 60*. Nun sind die von A oder J ausgehenden Tangentenpaare an den ersten Kreis auch Tangentenpaare an den zweiten. Somit sind die inneren Tangenten (aus J) nur bei ausschliessender Lage reell und verschieden, dagegen die äusseren (aus A) nur bei einschliessender Lage nicht reell. Erstere fallen bei äusserer, letztere bei innerer Berührung zusammen.

Sind ϑ und ϑ' die Neigungswinkel der Berührungsradien OT und OT', so sind die Normalgleichungen der äusseren Tangente AT bezw. der inneren Tangente JT'

$$(x - x_a) \cos \vartheta + y \sin \vartheta = 0, \quad (x - x_i) \cos \vartheta' + y \sin \vartheta' = 0.$$

Aus den Dreiecken OAT und OJT' folgen aber $\cos \vartheta = r : x_a = (r - r') : d$ und $\cos \vartheta' = r : x_i = (r + r') : d$. Ferner sind die Längen der äusseren Tangenten $t_a = d \sin \vartheta$ und die der inneren Tangenten $t_i = d \sin \vartheta'$. Somit lauten die gesuchten Gleichungen schliesslich

$$(r - r') x + t_a y - d r = 0, \quad (r + r') x + t_i y - d r = 0.$$

Dabei ist bekanntlich $t_a{}^2 = d^2 - (r - r')^2$ und $t_i{}^2 = d^2 - (r + r')^2$.

§ 61. Sind zwei beliebige Kreise gegeben durch die Normalgleichungen

$$x^2 + y^2 - 2 a_1 x - 2 b_1 y + c_1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2 a_2 x - 2 b_2 y + c_2 = 0,$$

so ist die Differenz derselben stets eine Gleichung ersten Grades

$$2 (a_2 - a_1) x + 2 (b_2 - b_1) y - (c_2 - c_1) = 0.$$

Sie stellt eine Gerade dar, welche zur Centralen normal ist, denn letztere hat die zu ersterer negativ reciproke Richtungszahl $(b_2 - b_1) : (a_2 - a_1)$. Wenn die Kreise sich schneiden oder berühren, so ist diese Gerade die gemeinsame Sehne der Schnittpunkte oder die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt. Denn jedes Coordinatenpaar, welches die gegebenen Gleichungen befriedigt, macht auch ihre Differenz zu Null.

Diese Gerade heisst **Potenzlinie der beiden Kreise**, da **alle ihre Punkte in Bezug auf die gegebenen Kreise gleiche Potenzen haben.** Ihre Gleichung entsteht nämlich durch Gleichsetzung der linken Seiten der gegebenen

$$x^2 + y^2 - 2 a_1 x - 2 b_1 y + c_1 = x^2 + y^2 - 2 a_2 x - 2 b_2 y + c_2,$$

wo dann beide Seiten eben jene Potenzen des Punktes $x \mid y$ bedeuten. Von jedem ausserhalb der Kreise befindlichen Punkte der Potenzlinie gehen gleich lange Tangenten an dieselben. Daher halbirt die Potenzlinie die gemeinsamen Tangenten t_a, t_i.

§ 62. Wird ferner ein dritter Kreis $x^2 + y^2 - 2 a_3 x - 2 b_3 y + c_3 = 0$ angenommen, so hat derselbe mit dem ersten und zweiten die Potenzlinien

$$2 (a_1 - a_3) x + 2 (b_1 - b_3) y - (c_1 - c_3) = 0,$$
$$2 (a_3 - a_2) x + 2 (b_3 - b_2) y - (c_3 - c_2) = 0.$$

Nun ergibt aber die Summe dieser beiden Gleichungen die Gleichung der Potenzlinie des § 61. Somit gehen die Potenzlinien der Paare, welche aus drei Kreisen gebildet sind, durch einen Punkt, das **Potenz-**

centrum der drei Kreise. Seine Potenzen in Bezug auf die drei Kreise sind gleich, also auch die Längen seiner Tangenten, falls der Punkt ausserhalb der Kreise liegt.

Das Potenzcentrum der beiden gegebenen Kreise mit einem dritten Hilfskreise liegt stets auf der Potenzlinie jener. Schneiden sich also die gegebenen nicht, so kann man doch den Hilfskreis so annehmen, dass er beide schneidet. Die beiden Schnittsehnen bestimmen das Potenzcentrum als ihren Schnittpunkt. Die durch denselben gehende Normale zur Centralen der gegebenen Kreise ist deren Potenzlinie.

§ 63. Kreise ergeben sich auf mannigfache Art als Örter von Punkten; von Wichtigkeit sind besonders die beiden folgenden. Der Ort des Scheitels P eines unveränderlichen Winkels δ, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte S, S' gehen, ist ein durch S und S' gehender Kreis. Denn nehmen wir als S und S' die Punkte $0 \mid \pm R$ der Ordinatenaxe, so haben PS und PS' die Gleichungen

$$y - R = x \, tg \, \vartheta, \;\; y + R = x \, tg \, (\vartheta + \delta) = x \, \frac{tg \, \vartheta + tg \, \delta}{1 - tg \, \vartheta \, tg \, \delta}.$$

Setzt man nun den Wert von $tg \, \vartheta$ aus der ersten in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich nach leichter Reduction

$$x^2 + y^2 - 2 \, R \, x \, ctg \, \delta - R^2 = 0.$$

Dieser Kreis hat den Mittelpunkt auf der Abscissenaxe, $a = R \, ctg \, \delta$, und zwar auf der positiven oder negativen, je nachdem δ spitz oder stumpf ist. Dabei ist aber δ der Winkel der positiven Drehung des Schenkels PS nach PS'. Also liegt SS' dem Winkel δ oder $180 - \delta$ gegenüber, je nachdem P sich auf der positiven oder negativen Seite der Ordinatenaxe befindet.

Ferner ist der Ort eines Punktes P, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten S und S' ein unveränderliches Verhältnis n haben, ein Kreis, von welchem ein Durchmesser durch S und S' harmonisch in diesem Verhältnis geteilt wird. Denn die Ausdrücke für die Längen PS und PS' ergeben unmittelbar, wenn S, S' wieder $0 \mid \pm R$ sind,

$$x^2 + (y - R)^2 = n^2 \, [x^2 + (y + R)^2] \text{ oder } x^2 + y^2 - 2 \, R \, \frac{1 + n^2}{1 - n^2} y + R^2 = 0.$$

Dieser Kreis hat seinen Mittelpunkt auf der Geraden SS' in $b = R \, (1 + n^2) : (1 - n^2)$. Das Quadrat des Radius ist $r^2 = (b - R) \, (b + R) = 4 \, n^2 : (1 - n^2)^2$. Der Kreis ist zum Kreise $x^2 + y^2 = R^2$ über SS' als Durchmesser orthogonal (§ 58). Unter diesen Kreisen, die verschiedenen Verhältniswerten n entsprechen, befindet sich insbesondere für $n = 1$ eine Gerade, die Potenzlinie $y = 0$ selbst (§ 61), als Ort aller Punkte gleichen Abstands von beiden Centren.

B.: Verlangt wird der Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei festen Punkten eine constante Quadratsumme ergeben.

§ 64*. Alle Kreise, die durch zwei feste Punkte S, S' gehen, bilden ein Kreisbüschel mit den Grundpunkten S, S'. Werden S, S' als $0 \mid \pm R$ genommen, so können ihre Gleichungen auf die Normalform gebracht werden (vgl. § 63)

$$x^2 + y^2 - 2 \, a \, x - R^2 = 0,$$

wo a eine Unbestimmte ist, welche einen beliebigen Mittelpunkt in der Abscissenaxe angibt. Denn diese Gleichung stellt für jedes a stets einen Kreis dar, welcher durch die Schnittpunkte S, S' von $x=0$ mit dem Kreise $x^2+y^2-R^2=0$ hindurchgeht.

Kreise, die zum Kreise $x^2+y^2=R^2$ orthogonal sind und ihre Mittelpunkte auf der Ordinatenaxe haben, besitzen Gleichungen, welche, auf die Normalform gebracht, lauten (§ 63)

$$x^2+y^2-2\,b\,y+R^2=0\,;$$

und zwar ist b eine Unbestimmte, welche einen beliebigen ausserhalb liegenden Mittelpunkt in der Ordinatenaxe angibt. Denn die Potenz des Nullpunktes in Bezug auf den Kreis vom Centrum $0\,|\,b$ ist R^2 (§ 50), also die Länge der Tangente gleich dem Radius R des um O beschriebenen Kreises. Je zwei Kreise obiger Gleichungen besitzen die Abscissenaxe als Potenzlinie, ohne sie zu schneiden. Die Gesamtheit dieser Kreise nennt man ein Kreisbüschel mit den Grenzpunkten S, S'. Diese Bezeichnung der Punkte $0\,|\pm R$ als Grenzpunkte ist darin begründet, dass der Radius des Kreises $0\,|\,b$ bis zu Null abnimmt, wenn sich der Mittelpunkt dem Nullpunkt bis zu einem Grenzpunkt S oder S' nähert, dass nämlich für $b=\pm R$ die Gleichung $x^2+(y\mp R)^2=0$ einen Nullkreis darstellt.

Jeder Kreis dieses zweiten Büschels schneidet jeden Kreis des ersten Büschels orthogonal (Fig. § 57). Denn, sind $a\,|\,0$ und $0\,|\,b$ die Mittelpunkte, so sind die Radienquadrate a^2+R^2 und b^2-R^2, haben also die Summe a^2+b^2 gleich dem Quadrat der Centraldistanz. Zwei Kreisbüschel sind zu einander orthogonal, wenn dieselben festen Punkte Grundpunkte des einen und Grenzpunkte des andern sind.

B.: Der Ort eines Punktes ist zu finden, von dem aus zwei feste Kreise a, b, r; a', b', r' unter gleichen Winkeln gesehen werden. Aus den Ausdrücken für die Sinus der halben Winkel der Tangentenpaare folgt die Gleichung

$$r'^2\,[(x-a)^2+(y-b)^2]=r^2\,[(x-a')^2+(y-b')^2],$$

welche einen Kreis des durch die gegebenen bestimmten Büschels darstellt, für $r=r'$ speciell die Potenzlinie.

IV. Die Parabel.

§ 65. Die einfachsten Erzeugungsgesetze von geometrischen Örtern, welche sich auf Eigenschaften der Abstände eines beweglichen Punktes von festen Elementen bezogen, waren folgende. Der Ort eines Punktes mit constantem Abstand von einer Geraden ist ein Parallelenpaar (§ 20), von einem Punkte: ein Kreis (§ 43). Der Ort eines Punktes mit proportionalen, speciell gleichen Abständen von zwei festen Geraden ist ein Geradenpaar (§ 38), von zwei festen Punkten: ein Kreis (§ 63), speciell eine Gerade. Der Ort eines Punktes mit proportionalen, speciell gleichen Abständen von einem festen Punkt und einer festen Geraden durch ihn ist ein Linienpaar, speciell eine Gerade (§ 39).

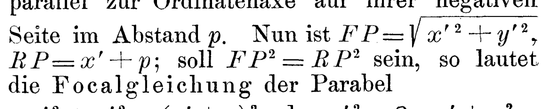
Den Abschluss dieser Gruppe von Bewegungsgesetzen gibt nun erst die Annahme eines festen Punktes und einer festen Geraden in

unabhängiger Lage. Die geometrischen Örter eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Punkte F und einer festen Geraden l in einem gegebenen Verhältnisse ε stehen, sind nun Curven, welche insgesamt als (eigentliche) Kegelschnitte bezeichnet werden. Der feste Punkt F heisst Brennpunkt (focus), die feste Gerade l Leitgerade (directrix), die von F auf l gefällte Normale Hauptaxe des Kegelschnittes. Die Abstände eines Curvenpunktes von Brennpunkt und Leitgerade können wir kurz Brennradius und Leitabstand nennen.

Je nachdem der Zahlwert des Verhältnisses ε gleich Eins, kleiner oder grösser als Eins ist, sind den wesentlich verschiedenen Gestalten dieser Curven besondere Namen beigelegt worden.

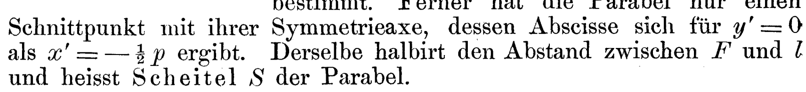
§ 66. Der Ort eines Punktes P, dessen Abstände von einem Brennpunkte F und einer Leitgeraden l gleich sind, heisst Parabel. Die Punkte der Parabel werden paarweise als Schnittpunkte je einer Parallelen zur Leitgeraden l mit einem Kreise vom Centrum F erhalten, dessen Radius dem Leitabstand jener Geraden gleich ist. Daher ist die zu l normale Hauptaxe der Parabel Symmetrieaxe derselben. Mechanisch wird die Parabel erzeugt, wenn ein zeichnender Stift einen in F und am Ende des einen Schenkels eines rechten Winkels befestigten Faden längs desselben gespannt erhält, während der andere Winkelschenkel in l gleitet.

Um die Gleichung der Parabel aufzustellen, nehme man den Brennpunkt als Nullpunkt, die Hauptaxe als Abscissenaxe, die Leitgerade parallel zur Ordinatenaxe auf ihrer negativen Seite im Abstand p. Nun ist $FP = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, $RP = x' + p$; soll $FP^2 = RP^2$ sein, so lautet die Focalgleichung der Parabel



$$x'^2 + y'^2 = (x' + p)^2 \quad \text{oder} \quad y'^2 = 2\,p\,x' + p^2.$$

Aus derselben folgen, wenn man $x' = 0$ setzt, die Ordinaten der Schnittpunkte H, h der Parabel mit der y'-Axe als $y' = \pm p$. Man nennt diese im Brennpunkt errichtete Parabelordinate Halbparameter p der Parabel. Durch Brennpunkt, Leitlinie und Halbparameter ist die Parabel bestimmt. Ferner hat die Parabel nur einen Schnittpunkt mit ihrer Symmetrieaxe, dessen Abscisse sich für $y' = 0$ als $x' = -\frac{1}{2}p$ ergibt. Derselbe halbirt den Abstand zwischen F und l und heisst Scheitel S der Parabel.



B.: Man bestimme den Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher einen festen Kreis und eine feste Gerade berührt.

§ 67. Zur Vereinfachung der Parabelgleichung dient offenbar die Verlegung des Nullpunktes in den Scheitel. Dieselbe wird bewirkt (§ 13), wenn man $x' = x + \frac{1}{2}p$, $y' = y$ setzt, da $SF = \frac{1}{2}p$, $SO = -\frac{1}{2}p$ ist. Dann lautet die nur zweigliedrige Scheitelgleichung

$$y^2 = 2\,p\,x.$$

Dies folgt auch direct aus dem Gesetze: $FP = SQ + OS$ mittelst $(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2$. Dieselbe Gleichung drückt auch den Satz aus: Die Ordinate jedes Parabelpunktes ist das geometrische Mittel

zwischem dem Parameter $2p$ und der vom Scheitel aus gezählten Abscisse des Punktes. Hieraus folgt eine andere geometrische Construction der Parabelpunkte.

Statt durch F, l und p ist eine Parabel auch durch den Scheitel S, die Axe und irgend einen ihrer Punkte bestimmt. Denn, für S als Nullpunkt und die Axe als x-Axe, ist p dadurch zu berechnen, dass die Coordinaten $x_1 | y_1$ des gegebenen Punktes $y_1^2 = 2px_1$ befriedigen müssen. Die Quadrate der Ordinaten irgend zweier Punkte verhalten sich also wie ihre Abscissen, $y^2 : y_1^2 = x : x_1$.

Um die Gestalt der Parabel aus der Gleichung zu ermitteln, gebe man x beliebige von 0 bis ∞ wachsende positive Werte; dann erhält auch y zwei entgegengesetzt gleiche Werte $+\sqrt{2px}$ und $-\sqrt{2px}$. Demnach ist die Parabel eine nicht-geschlossene Curve, welche sich vom Nullpunkt aus, zur positiven Axe symmetrisch, in sich immer weiter von ihr entfernenden Zügen bis ins Unendliche erstreckt. Auf der negativen Seite der y-Axe liegt kein Parabelpunkt, so lange der Parameter $2p$ als positiv genommen wird.

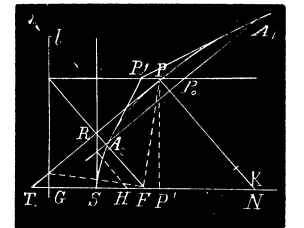
§ 68. Das Erzeugungsgesetz lässt sich auch leicht in Polarcoordinaten vom Nullpunkt F schreiben. Denn es ist $FP = r$ der sog. Brennradius des Punktes P, $QP = r \cos \vartheta$, wenn $\vartheta = XFP$ bedeutet, also

$$r = r \cos \vartheta + p \quad \text{oder} \quad r = \frac{p}{1 - \cos \vartheta}.$$

Erteilt man nun ϑ alle Werte von 0 bis 180°, so gibt die Formel jeweilen die Länge des Brennradius. Dieselbe ist für $\vartheta = 0$ unendlich gross, d. h. der unendlich ferne Punkt der Axe gehört der Parabel an. Mit wachsendem ϑ nimmt der Brennradius fortwährend ab und erreicht seinen kleinsten Wert $r = \frac{1}{2}p$, wenn $\vartheta = 180°$, $\cos \vartheta = -1$ geworden ist. Der Scheitel ist also dem Brennpunkt am nächsten. Da $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$ ist, so ist die Curve zur Axe symmetrisch. Diese Discussion zeigt deutlich: Die Parabel besitzt einen und nur einen unendlich fernen Punkt.

§ 69. Um die Schnittpunkte einer zur Axe nicht normalen Geraden $y = mx + k$ mit der Parabel $y^2 = 2px$ zu finden, berechne man die gemeinsamen Wurzelpaare $x_1 | y_1$ und $x_2 | y_2$ der gegebenen Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{p - mk \pm \sqrt{p(p - 2mk)}}{m^2}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{p \pm \sqrt{p(p - 2mk)}}{m}.$$



Reelle Werte haben diese Ausdrücke nur, wenn $p \geqq 2mk$ ist. Nun ist mk gleich dem Abscissenabschnitt SH der Normalen, welche im Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinatenaxe errichtet wird. Also liegt auf der Geraden kein Parabelpunkt, wenn H ausserhalb der Strecke SF liegt.

Dagegen ist die Gerade eine Secante mit zwei reellen Schnittpunkten A_1, A_2, wenn $p > 2mk$ ist oder H zwischen S und F liegt. Ist jedoch die Gerade zur Axe parallel, also $m = 0$ und H in S, so ergeben die Auflösungsformeln zwei Werte, deren einer x_1 nur den Nenner Null, deren anderer x_2 aber Zähler und Nenner gleich

Null hat. Also ist der eine Schnittpunkt $x_1 | y_1$ unendlich fern, der andere $x_2 | y_2$ aber ist doch nicht unbestimmt, sondern folgt für $y = k$ aus $y^2 = 2px$ als $x_2 = k^2 : 2p, y_2 = k$. Jede Parallele zur Parabelaxe schneidet die Parabel daher nur in einem endlichen Punkt, ausserdem aber im unendlich fernen Punkte der Axe.

§ 70. Endlich fallen die beiden Schnittpunkte in einen einzigen zusammen, wenn $p = 2mk$ ist oder H nach F kommt. Eine solche Gerade heisst Tangente der Parabel und hat eine Gleichung der Form

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

Dieselbe zeigt, dass es nur eine Parabeltangente von gegebener Richtung m gibt. Ihr Berührungspunkt ist dann $x_1 = p : 2m^2, y_1 = p : m$.

Mittelst der Coordinaten $x_1 | y_1$ kann also m eliminirt werden, denn es ist $y = m\ (x + x_1)$ und schliesslich

$$y_1 y = p\,(x + x_1).$$

Dies ist die Gleichung der Parabeltangente im Punkte $x_1 | y_1$. Aus der Parabelgleichung entsteht sie, indem das Quadrat y^2 durch das Product $y_1 y$, ferner $2x = x + x$ durch $x + x_1$ ersetzt wird.

Umgekehrt ist der eine Schenkel eines rechten Winkels, dessen anderer durch den Brennpunkt geht, fortwährend Tangente an eine Parabel, wenn der Scheitel des Winkels die Scheiteltangente durchläuft. Denn, ist die Gleichung des letzteren Schenkels $y = m'(x - \frac{1}{2}p)$, so ist die Gleichung der im Schnittpunkt $0 | \frac{1}{2}pm'$ mit $x = 0$ errichteten Normalen $y + \frac{1}{2}pm' = -x : m'$, welche mit der Tangentengleichung identisch ist, falls $-1 : m' = m$ gesetzt wird.

§ 71. Die aufgelösten Formeln des § 69 zeigen aber, dass in der Sehne der Punkte $A_1 A_2$ die Mitte P_0 die Coordinaten hat

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p}{m^2} - \frac{k}{m}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{m}.$$

Somit ist der Ort der Mitten aller Sehnen der Richtung m eine Axenparallele von der Gleichung $my = p$. Auf derselben befindet sich auch der Berührungspunkt der Tangente der Richtung m (§ 70).

Umgekehrt halbirt jede Parallele $y = k$ alle Sehnen einer bestimmten Richtungszahl $m = p : k$, und ihr endlicher Schnittpunkt ist der Berührungspunkt der jenen parallelen Tangente. Infolge dieser Analogie mit den Durchmessern des Kreises heissen die Axenparallelen Durchmesser der Parabel und die durch jeden halbirten Sehnen conjugirte Sehnen, ihre Richtung die dem Durchmesser conjugirte Richtung und umgekehrt. Der Axe allein ist die normale Richtung conjugirt.

§ 72. Die Tangente in einem Punkte $P\ (x_1 | y_1)$ der Parabel geht wiederum als Grenzlage aus der sich um P drehenden Secante PQ hervor, wenn die Sehne SQ zu Null wird. Zum analytischen Grenzübergang muss (§ 48) der Ausdruck der Richtungszahl m von PQ mittelst der Relationen $y_1{}^2 = 2px_1$, $y_2{}^2 = 2px_2$ umgeformt werden. In der Tat folgt aus $y_1{}^2 - y_2{}^2 = 2p\,(x_1 - x_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_1 + y_2} = \frac{p}{y_0}, \quad \text{also} \quad y - y_1 = \frac{p}{y_0}(x - x_1)$$

als Gleichung der Secante PQ. Hier kann $x_2 = x_1 = x_0$, $y_2 = y_1 = y_0$ gesetzt werden. Mit Rücksicht auf die erste Relation wird aus

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \text{ wieder } y_1 y = p(x + x_1).$$

Zur Construction der Tangente dient auch die Bemerkung (Fig. § 69), dass der Axenabschnitt ST der Tangente entgegengesetzt gleich der Abscisse SP' des Berührungspunktes P ist. Denn die Annahme $y = 0$ in der Tangentengleichung bewirkt $x = -x_1$. Übrigens heisst die Länge $TP' = 2x_1$, als Projection der Tangentenlänge TP auf die Axe, Subtangente des Punktes P.

Die Entfernung des Axenpunktes T vom Brennpunkt ist $x_1 + \frac{1}{2}p$, d. h. gleich dem Brennradius FP des Berührungspunktes $x_1 | y_1$ (§ 67). Daraus folgt im Dreieck TFP die Gleichheit der Winkel FTP und FPT. Die Tangente halbirt so den äusseren Winkel zwischen dem Durchmesser und dem Brennradius ihres Berührungspunktes.

B.: Wo liegen die Punkte, welche zum Brennpunkt in Bezug auf die Parabeltangenten symmetrisch sind?

§ 73. Was wird bei demselben Grenzübergang (§ 72) aus der Mittelnormalen

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$$

der Sehne $P_1 P_2$, wenn die Secante zur Tangente wird? Die alsdann entstehende Gleichung

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

definirt die Normale PN zur Tangente im Berührungspunkte P. Dieselbe wird auch als die Normale der Parabel im Punkte $x_1 | y_1$ bezeichnet.

Ihr Schnittpunkt N mit der Axe hat die Abscisse $x_1 + p$. Also ist die Länge $P'N$, welche als Projection der Normalenlänge PN Subnormale des Punktes P heisst, für jeden Punkt der Parabel unveränderlich, gleich dem Halbparameter p. Auch dies gibt ein bequemes Constructionsmittel für Normale und Tangente.

B.: Man drücke die Längen PT und PN der Tangente und Normale aus. — Wo berühren Tangenten, die mit der Scheiteltangente ein gleichseitiges Dreieck bilden, wo die, deren Länge gleich p ist?

§ 74*. Die Parabel ist die erste Curve, welche veränderliche Krümmung hat, während der Kreis überall gleichmässig gekrümmt ist. Man benutzt daher den Vergleich mit einem Kreise, um die Krümmung einer Curve an einer gegebenen Stelle messbar auszudrücken. Nun können wir durch die Punkte P_1, P_2, P_3 der Curve einen bestimmten Kreis legen, dessen Mittelpunkt auf den Mittelnormalen der Sehnen liegt. Lassen wir die zwei Punkte P_1, P_3 zusammenrücken in P_1, so wird der Kreis bestimmt, welcher die Curve in P_1 berührt und durch den getrennten Punkt P_2 geht. Endlich können auch beide Punkte P_2, P_3 gleichzeitig dem Punkte P_1 auf der Curve näher rücken, dann wird sich der Schnittpunkt der Mittelnormalen $P_1 P_2$, $P_1 P_3$ einer Grenzlage K nähern, welche auch als Grenzlage des Schnittpunktes der Curvennormalen in P_1 mit der Mittelnormalen von $P_1 P_2$ aufgefasst werden darf (vgl. § 75*).

Der Kreis geht alsdann in einen solchen über, welcher im Punkte P_1 sich am engsten der Curve anschmiegt, nämlich drei Nachbarpunkte derselben enthält. Dieser durch den Grenzübergang entstehende Kreis heisst der Krümmungskreis der Curve im Punkte P_1, weil die Curve dort seine Krümmung hat. Sein Mittelpunkt heisst Krümmungscentrum, sein Radius ϱ Krümmungsradius, $1:\varrho$ die Krümmung.

§ 75*. Die Bestimmung des Krümmungscentrums K geschieht also folgendermassen. Die Mittelnormale der Sehne $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ hat die Gleichung (§ 73)

$$y - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = -\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)\,[x - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)],$$

während die Normalen der Parabel in $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ die Gleichungen haben $p\,(y - y_1) = -y_1\,(x - x_1)$, $p\,(y - y_2) = -y_2\,(x - x_2)$.
Die halbe Summe der letzteren unterscheidet sich von der ersteren nur um ein Glied $\frac{1}{4}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$, welches beim Grenzübergang $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ verschwindet. Daher hat der Schnittpunkt der ersten mit der Mittelnormalen dieselbe Grenzlage $K\ (x_n \mid y_n)$, wie der Schnittpunkt der beiden Curvennormalen.

Für letzteren aber findet sich durch Subtraction der Gleichungen

$$p = x_n - \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{y_1 - y_2} = x_n - x_1 - y_2 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = x_n - x_1 - y_2 \frac{y_1 + y_2}{2p}$$

und bei Einsetzung von $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ schliesslich

$$x_n = p + x_1 + \frac{y_1^2}{p} = p + 3x_1,\quad y_n = -\frac{2x_1 y_1}{p} = -\frac{y_1^3}{p^2}$$

als Coordinaten des Krümmungscentrums.

Für den Krümmungsradius ϱ folgt

$$\varrho^2 = (p + 2x_1)^2 + \left(\frac{2x_1}{p} + 1\right)^2 y_1^2 = (p + 2x_1)^2\left(1 + \frac{y_1^2}{p^2}\right) = \frac{1}{p}(2x_1 + p)^3.$$

Somit wächst der Krümmungsradius mit der Abscisse des Parabelpunktes. Den kleinsten Krümmungsradius hat die Parabel an ihrem Scheitel, nämlich $\varrho = p$ gleich dem Halbparameter.

§ 76*. Polare eines beliebigen Punktes $P_1\ (x_1 \mid y_1)$ in Bezug auf die Parabel heisst die ihm durch die Gleichung

$$y_1 y = p\,(x + x_1)$$

zugeordnete Gerade. Ihre Richtungszahl ist $m = p : y_1$, sie ist also dem den Pol P_1 enthaltenden Durchmesser $y = y_1$ conjugirt (§ 71); ihr Schnittpunkt mit ihm hat eine Abscisse x gemäss der Bedingung $p\,(x + x_1) = y_1^2$. Da nun aber $y_1^2 : 2p$ die Abscisse des Durchmesserendpunktes bedeutet, so ist dieser die Mitte zwischen dem Pole und dem Durchmesserschnittpunkt seiner Polaren. Hiernach wird die Polare zu einem gegebenen Pole gefunden, sobald man auf dem Durchmesser des Pols den Endpunkt und seine Tangente kennt. Umgekehrt findet man zu einer Geraden den zugehörigen Pol, indem man die parallele Tangente zieht (§ 70) und deren Berührungspunkt als Mitte zwischen der Geraden und dem auf seinem Durchmesser gelegenen Pole nimmt.

Weitere Constructionsmittel enthält der aus der Symmetrie von $y_1 y_2 = p\,(x_1 + x_2)$ für $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ entspringende Satz: Die Polare eines Punktes P_1 geht durch einen Punkt P_2, wenn die Polare von P_2 durch P_1 geht (vgl. § 54).

§ 77*. Die Polare von P_1 schneidet die Parabel oder schneidet sie nicht, je nachdem das Kriterium des § 69 ergibt

$$p \gtrless 2\frac{p}{y_1}\cdot\frac{p\,x_1}{y_1} \text{ oder } y_1{}^2 - 2\,p\,x_1 \gtrless 0.$$

Im ersten Falle liegt der Pol ausserhalb der Parabel und die Polare ist die Berührungssehne der zwei vom Pole ausgehenden Tangenten. Denn, da ein Schnittpunkt $x'\,|\,y'$ der Polaren mit der Parabel die Bedingung $y_1\,y' = p\,(x' + x_1)$ erfüllt, so liegt auch $x_1\,|\,y_1$ auf der Tangente $y'\,y = p\,(x + x')$. Zur Construction dieser Tangenten dient die Eigenschaft des § 70 vom umhüllenden Schenkel eines rechten Winkels. Die Tangenten enthalten die Schnittpunkte der Scheiteltangente mit dem Kreise, welcher den Pol und den Brennpunkt zu Endpunkten eines Durchmessers hat.

Falls $y_1{}^2 - 2\,p\,x_1 = 0$ ist, der Pol auf der Parabel liegt, wird die Polare zu der in ihm berührenden Tangente. Liegt endlich der Pol innerhalb der Parabel, so wird die durch ihn gehende zur Polaren parallele Sehne in ihm halbirt. Die Polare des Brennpunktes $\frac{1}{2}\,p\,|\,0$ ist die Leitgerade $x + \frac{1}{2}\,p = 0$. Die Polare eines Punktes P_1 der Leitgeraden ist im Brennpunkt normal zu FP_1, denn die Richtungszahlen sind entgegengesetzt gleich. Also bestimmen der Berührungspunkt und der Leitgeradenschnittpunkt einer Tangente mit dem Brennpunkt stets ein rechtwinkliges Dreieck.

§ 78*. Jeder Durchmesser besitzt gewisse Eigenschaften bezüglich der conjugirten Sehnen, gleichartig wie die Axe bezüglich ihrer Ordinaten (§ 71). Also kann man die Parabel ähnlich vorteilhaft auf einen Durchmesser als Abscissenaxe und die ihm conjugirte Tangente als Ordinatenaxe eines schiefen Coordinatensystems $X\,|\,Y$ beziehen. Soll der Coordinatenwinkel ω sein, so muss der Abstand des Durchmessers von der Axe $p\,ctg\,\omega$ und die Entfernung des neuen Nullpunktes von der Scheiteltangente $\frac{1}{2}\,p\,ctg^2\,\omega$ sein.

Also geht die Scheitelgleichung durch eine Verschiebungstransformation rechtwinkliger Coordinaten über in

$$(y' + p\,ctg\,\omega)^2 = 2\,p\,(x' + \tfrac{1}{2}\,p\,ctg^2\,\omega).$$

Wird aber vom rechtwinkligen System der x'', y'' durch die Neigungstransformation (§ 18) der Übergang zum schiefwinkligen System der X, Y gemacht, so lautet die Endgleichung

$$(Y \sin\omega + p\,ctg\,\omega)^2 = 2\,p\,(X + Y\cos\omega + \tfrac{1}{2}\,p\,ctg^2\,\omega)$$

oder

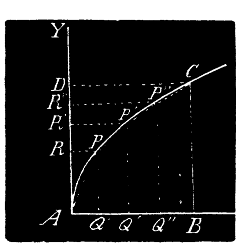
$$Y^2 \sin^2\omega = 2\,p\,X \text{ oder } Y^2 = 2\,p'\,X.$$

Diese hat dieselbe zweigliedrige Form wie die Scheitelgleichung, nur dass die dem Halbparameter p entsprechende Constante durch $p' = p : \sin^2\omega$ ersetzt ist. Diese Länge gehört der durch den Brennpunkt gehenden Ordinate an, denn die Abscisse des Brennpunktes ist offenbar $X = \frac{1}{2}\,p\,(1 + ctg^2\,\omega) = p : 2\,\sin^2\omega = \frac{1}{2}\,p'$, also die Halbsehne $Y = \pm\,p : \sin^2\omega = \pm\,p'$.

Aus dieser Unveränderlichkeit der Gleichungsform der Parabel folgt auch die fortdauernde Gültigkeit der Gleichungsform der Tangente und Polare für schiefe wie für rechtwinklige Coordinaten.

B.: Umformung der Scheitelgleichung $y^2 = 10\,x$ für den Axenwinkel $\omega = 60^\circ$ gibt $3\,Y^2 = 40\,X$.

§ 79*. Ein weiteres Beispiel für die Verwendbarkeit allgemeiner Parallelcoordinaten bietet die *Quadratur der Parabel*, d. h. die Bestimmung des Inhalts des von einem Parabelbogen und der Sehne seiner Endpunkte eingeschlossenen Flächensegmentes. Nehmen wir den die Sehne halbirenden Durchmesser als X-Axe, die Tangente im Endpunkte als Y-Axe, so bilden irgend zwei Parabelpunkte P', P'' und ihre Axenprojectionen Q', Q'' und R', R'' zwei Trapeze $Q'\,Q''\,P''\,P'$ und $R'\,R''\,P''\,P'$, deren Inhalte sich verhalten wie



$$(Y' + Y'')\,(X'' - X') : (X' + X'')\,(Y'' - Y').$$

Hier kann man aber vermöge $Y'^2 = 2\,p'\,X'$, $Y''^2 = 2\,p'\,X''$ setzen $(X'' - X') : (Y'' - Y') = (Y' + Y'') : 2\,p$ und $2\,p\,(X' + X'') = Y'^2 + Y''^2$. Also ist jenes Flächenverhältnis

$$Q'\,Q''\,P''\,P' : R'\,R''\,P''\,P' = (Y' + Y'')^2 : (Y'^2 + Y''^2)$$

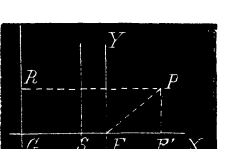
und dies nähert sich, je näher P', P'' an einander angenommen werden, dem Quotienten 2, der für $Y' = Y''$ erreicht würde.

Ersetzen wir also den Parabelbogen $A\,C$ durch einen gebrochenen Sehnenzug $A\,P\,P'\,P'' \ldots C$ und bilden zu jeder Sehne die obigen Trapeze, so nähert sich auch das Verhältnis ihrer Summen, der Polygonflächen $A\,B\,C\,P''\,P'\,P$ und $A\,D\,C\,P''\,P'\,P$ der Zahl 2 und zwar um so mehr, je enger einander die Ecken P, P', $P'' \ldots$ sind. Geht man schliesslich zur Grenze über, so teilt der Parabelbogen das Parallelogramm $A\,B\,C\,D$, das die halbe Endsehne und der Durchmesser begrenzt in die Segmente $A\,B\,C = 2\,.\,A\,D\,C$. *Somit ist das durch die ganze Sehne abgeschnittene Parabelsegment zwei Drittel des von der Sehne mit den Tangenten in ihren Endpunkten gebildeten Dreiecks.*

B.: Welchen Inhalt hat das Parabelsegment, dessen Sehne unter der Neigung ω durch den Brennpunkt geht? $J = 2\,p^2 : 3 \sin^3 \omega$.

V. Die Ellipse.

§ 80. *Der Ort eines Punktes, dessen Abstände von einem festen Brennpunkte F und einer festen Leitgeraden l ein constantes Verhältnis ε haben*, wird folgendermassen durch eine Gleichung ausgedrückt. Offenbar ist der Ort symmetrisch in Bezug auf die von F auf l gefällte Normale als *Hauptaxe*. Denn je die im Abstande x von l gezogene Parallele und je der um F mit dem Radius εx beschriebene Kreis liefern zwei zur Hauptaxe symmetrische Punkte, wenn sie sich schneiden. Zur einfachen Construction der proportionalen Strecken x und $\varepsilon\,x$ ziehe man durch den Axenschnittpunkt G der Leitgeraden eine Gerade unter der Neigung α, wenn $\varepsilon = tg\,\alpha$ ist. Dieselbe schneidet auf der Parallelen zu l je die Länge $\varepsilon\,x$ ab, welche die Entfernung ihrer Curvenpunkte von F bedeutet.



Wir nehmen am zweckmässigsten die Symmetrieaxe als x-Axe und vorerst den Brennpunkt F als Nullpunkt. Schneidet dann l die negative

x-Axe im Abstande d, so ist der Brennradius des Punktes P, d. h. die Entfernung $FP = \sqrt{x^2 + y^2}$ und der Leitabstand $RP = x + d$. Also lautet die Gleichung

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x + d)^2;$$

sie heisst Focalgleichung des Ortes, da sie auf den Brennpunkt bezogen ist. Sie sagt aus, dass der Brennradius sich durch die Abscisse linear ausdrückt.

Man kann die Gleichung auch in Polarcoordinaten schreiben, da $x = r \cos \vartheta$ ist, wenn ϑ die Abweichung des beweglichen Punktes P bedeutet. Es ergibt sich aus $r^2 = \varepsilon^2 (r \cos \vartheta + d)^2$ durch Wurzelausziehung

$$\pm r = \varepsilon (r \cos \vartheta + d) \text{ oder } r = \frac{\varepsilon d}{\pm 1 - \varepsilon \cos \vartheta}.$$

§ 81. Dieser Ort hat zwei reelle Punkte mit der y-Axe gemein, zufolge der Construction ($\vartheta = \frac{1}{2}\pi$) diejenigen von der Ordinate $\pm \varepsilon d = \pm p$. Die im Brennpunkt errichtete Ordinate p bezeichnet man wiederum als den Halbparameter der Curve. Man erhält dasselbe Resultat, wenn man in der Focalgleichung $x = 0$ setzt und $y^2 = \varepsilon^2 d^2 = p^2$ findet. Mittelst p lässt sich nun die Focalgleichung geordnet schreiben:

$$(1 - \varepsilon^2) x^2 + y^2 - 2 \varepsilon p x - p^2 = 0.$$

Der Ort hat auch mit der Symmetrieaxe zwei Punkte S, S' gemein, welche wiederum Scheitel heissen sollen. Ihre Abscissen sind die Wurzeln x', x'' der durch Einsetzung von $y = 0$ entstehenden Gleichung $(1 - \varepsilon^2) x^2 - 2 \varepsilon p x - p^2 = 0$, also

$$\left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon p \mp \sqrt{\varepsilon^2 p^2 + (1 - \varepsilon^2) p^2}}{1 - \varepsilon^2} = p \frac{\varepsilon \pm 1}{1 - \varepsilon^2}, \; x' = \frac{-p}{1 + \varepsilon}, \; x'' = \frac{p}{1 - \varepsilon}.$$

Von diesen Scheiteln liegt nur einer S (x') zwischen Brennpunkt und Leitlinie. Derselbe ist überhaupt der dem Brennpunkt nächste Punkt des Ortes, wie aus dem Ausdruck in Polarcoordinaten in § 80 folgt.

§ 82. Nehmen wir nun diesen Scheitel S zum Nullpunkt, so erhalten wir die sogenannte Scheitelgleichung des Ortes. Nun ist nach Definition $SF = \varepsilon \, . \, GS$ und $GS + SF = d$, also $(1 + \varepsilon) SF = \varepsilon d = p$ und $(1 + \varepsilon) SG = -d$. In diesem Coordinatensystem ist SF die Abscisse des Brennpunktes und SG die Abscisse der Leitgeraden. Daher ist Brennradius und Leitabstand

$$FP = \sqrt{\left(x - \frac{p}{1 + \varepsilon}\right)^2 + y^2}, \; QP = x + \frac{d}{1 + \varepsilon}, \text{ also}$$

$$\left(x - \frac{p}{1 + \varepsilon}\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(x + \frac{d}{1 + \varepsilon}\right)^2 = \left(\varepsilon x + \frac{p}{1 + \varepsilon}\right)^2,$$

oder $\quad x^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2 \varepsilon d x$ oder $y^2 = 2 p x - (1 - \varepsilon^2) x^2$.

Diese dreigliedrige Scheitelgleichung könnte auch durch eine Verschiebungstransformation aus der viergliedrigen Focalgleichung (§ 82) hergeleitet werden.

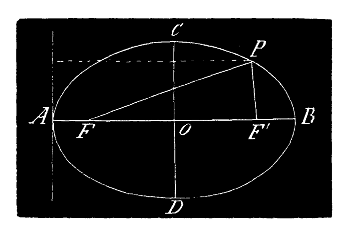
Ist nun ε ein echter Bruch, also $\varepsilon < 1$, so ist in der Scheitelgleichung das x^2 enthaltende Glied wesentlich negativ, und der Ort heisst genauer Ellipse. Die Ellipse ist also der Ort eines Punktes, der sich so bewegt, dass sein Abstand von einem

festen Brennpunkte (Brennradius) in einem vorgeschriebenen Verhältnis ε kleiner ist als sein Abstand von einer festen Leitgeraden (Leitabstand).

§ 83. Die ganze Ellipse liegt, symmetrisch in Bezug auf die positive x-Axe, nur auf der einen Seite der y-Axe. Denn zu negativen Werten von x gehören keine reellen von y; dasselbe gilt für positive x, welche grösser sind als der Quotient $2p:(1-\varepsilon^2)$, dessen Wert mit $2a$ bezeichnet zu werden pflegt; für $x = 2a$ wird $y^2 = 0$. Die Ellipse verläuft also zwischen den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 2a$.

Zu einem gegebenen Werte der Ordinate y ergibt die Gleichung zweiten Grades im allgemeinen zwei Abscissenwerte x_1 und x_2:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - (1-\varepsilon^2)\,y^2}}{1-\varepsilon^2} = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{y^2}{1-\varepsilon^2}}.$$



Das arithmetische Mittel derselben gibt die Abscisse der Mitte jeder zur Axe parallelen Sehne als constant, nämlich

$$x_0 = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = a.$$

Somit bietet die Ellipse noch eine zweite Symmetrie in Bezug auf die zur ersten normale Symmetrieaxe $x = a$, welche Nebenaxe heisst.

Im zweiten der obigen Ausdrücke gibt die Quadratwurzel die halbe Länge s der zur Hauptaxe parallelen Sehne an. Dieselbe ist am grössten für $y = 0$, nämlich gleich a, und nimmt mit wachsendem y ab bis zu $s = 0$ für

$$y = \frac{p}{\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \pm\, a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \pm\, b.$$

Daher ist die Ellipse eingeschlossen zwischen den Geraden $y = \pm b$, welche von ihr in den Endpunkten der Nebenaxe, den sog. Nebenscheiteln, erreicht werden. Die Längen der beiden Axen sind $2a$ und $2b$ und, da notwendig $a > b$ ist ($\varepsilon < 1$), so heisst a die grosse, b die kleine Halbaxe.

§ 84. Die Gleichung der Ellipse wird infolge der zweifachen Symmetrie der Curve offenbar zweckmässig auf die Symmetrieaxen als Coordinatenaxen bezogen. Denn aus den aufgestellten Relationen zwischen p, ε und a, b folgt umgekehrt auch

$$1-\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Demnach ist die kleine Halbaxe mittlere Proportionale zwischen der grossen und dem Halbparameter. Die Scheitelgleichung des § 82 aber lautet nun

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,x\,(2a - x).$$

Verschiebt man nun die y-Axe um a durch die Transformation $x = a + x', y = y'$, so wird $2a - x = a - x'$, also entsteht aus der Scheitelgleichung $a^2 y'^2 = b^2 (a^2 - x'^2)$ oder $b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2$. Schreibt man endlich wieder $x \mid y$ statt $x' \mid y'$, so lautet die auf die Symmetrieaxen bezogene sog. Axengleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Geschrieben in Form der Proportion $(a + x)(a - x) : y^2 = a^2 : b^2$ sagt sie aus, dass das Rechteck aus den Abschnitten der grossen Halbaxe zum Quadrat über der Ordinate im Teilpunkt in constantem Verhältnis steht. Aus der Gleichung, wie aus der Eigenschaft, geht hervor, dass die Ellipse mit gleichen Halbaxen $a = b$ ein Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ ist.

B.: Ort eines Punktes einer Strecke, deren Endpunkte auf den Axen gleiten (Ellipsenzirkel).

§ 85. Die Axengleichung enthält von den Coordinaten nur die Quadrate und drückt so die Symmetrie der Curve am deutlichsten aus. Die Ellipse ist nicht nur in Bezug auf die Axen, sondern auch, wie der Kreis, in Bezug auf ihren Schnittpunkt als Mittelpunkt symmetrisch. Jede in diesem halbirte Sehne heisst ein Durchmesser, die Hälfte ein Halbmesser der Ellipse.

Die aufgelösten Formen der Gleichung, d. h.

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

zeigen, dass zu jeder Abscisse x zwischen $-a$ und $+a$ zwei entgegengesetzt gleiche Ordinaten, zu jeder Ordinate x zwischen $-b$ und $+b$ zwei entgegengesetzt gleiche Abscissen gehören. Ebenso ergeben sie für $x = 0$, $y = \pm b$, für $y = 0$, $x = \pm a$ die Längen b und a als Axenabschnitte der Ellipse.

Diese Eigenschaften und Gleichungsformen erinnern an entsprechende beim Kreise. So zeigt die erste aufgelöste Form, dass jede Ordinate y der Ellipse sich zu der Ordinate Y im Kreise $x^2 + y^2 = a^2$, welche zu derselben Abscisse x gehört, so verhält, wie die kleine zur grossen Halbaxe $y : Y = b : a$. Da nun $b < a$ ist, so liegt die ganze Ellipse innerhalb des concentrischen Kreises vom Radius a: des äusseren Scheitelkreises. Ebenso folgt aus der zweiten aufgelösten Form, dass die Abscissen x und X, welche in der Ellipse und im inneren Scheitelkreise $X^2 + y^2 = b^2$ zu derselben Ordinate y gehören, sich wie $a : b$ verhalten, so dass die Ellipse ausserhalb dieses Kreises vom Radius b verläuft. Demnach ist die Hauptaxe überhaupt der grösste, die Nebenaxe der kleinste unter allen Durchmessern der Ellipse.

Unter Benutzung beider Scheitelkreise ergibt sich eine einfache Construction der Ellipse. Denn zieht man durch den Punkt Q oder $x \mid Y$ des äusseren Kreises eine Parallele zur Nebenaxe, durch den Punkt R oder $X \mid y$ des inneren eine Parallele zur Hauptaxe, so schneiden sie sich im Punkte P oder $x \mid y$ der Ellipse. Aber jene beiden Punkte werden aus den Kreisen durch denselben Durchmesser ausgeschnitten, da aus $y : Y = b : a = X : x$ auch $Y : x = y : X$ folgt.

B.: Einer Ellipse ein Rechteck von gegebenem Seitenverhältnis, speciell ein Quadrat einschreiben.

§ 86. Die Ellipse besitzt nun nicht nur einen Brennpunkt F und eine Leitlinie l, sondern noch ein zu diesen symmetrisches Paar F' und l'. Mit diesem ist die Ellipse wieder ganz auf die frühere Weise herzustellen. Die Abscissen der Brennpunkte gehören zu den Ordinatenwerten $y = \pm p = \pm b^2 : a$, sind also $\pm \sqrt{a^2 - b^2}$. Ihren Abstand $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ nennt man die Focaldistanz der Ellipse.

Die Brennpunkte werden construirt, falls die Halbaxen gegeben sind, als die Schnittpunkte der Hauptaxe mit den um die Nebenscheitel beschriebenen Kreisen vom Radius a. Endlich gibt das Verhältnis der Focaldistanz zur Hauptaxe ein Mass für die Abweichung der elliptischen von der kreisförmigen Gestalt und heisst daher Excentricität der Ellipse. Dieselbe ist aber, nach § 84, $c : a = \varepsilon$ das Verhältnis von Brennradius und Leitabstand.

Die Entfernung eines Brennpunktes vom nächsten Scheitel ist $(a - c)$; der Abstand der zugehörigen Leitlinie also $(a - c) : \varepsilon = a(1 - \varepsilon) : \varepsilon$ und ihr Mittelpunktsabstand um a grösser, also $a : \varepsilon$.

B.: Halbaxen $(2\sqrt{5},\ \sqrt{10})$, Excentricität $(1 : \sqrt{2})$ und Halbparameter $(\sqrt{5})$ der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 20$ berechnen.

§ 87. Nach jedem Punkte $P\ (x \mid y)$ der Ellipse gehen von den Brennpunkten F und F' aus zwei Brennradien, deren Längen sich durch x allein ausdrücken lassen (§ 80). Ihr Quadrat ist $(x \mp \varepsilon a)^2 + y^2$, und ersetzt man hier y^2 durch $(1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)$, so liefert die Ausrechnung $(a \mp \varepsilon x)^2$, so dass

$$FP = a - \varepsilon x,\quad F'P = a + \varepsilon x.$$

Daher ist die Summe der Brennradien eines jeden Ellipsenpunktes gleich der grossen Axe $2a$. Unmittelbar folgt dies aus der Definition, wonach der Brennradius das ε-fache des Leitabstandes von P ist. Denn die Summe der Abstände von beiden Leitlinien ist constant $2a : \varepsilon$, somit $FP + F'P = 2a$.

Umgekehrt ist die Ellipse der Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei festen Punkten F, F' eine gegebene Summe haben. Sind die Coordinaten von F, F' $\pm c \mid 0$, so ist der Ausdruck der Bedingung

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Schafft man durch zweimaliges Quadriren in geeigneter Form die Wurzeln hinweg, so gelangt man zu $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, d. h. der Axengleichung. Ferner liegt ein Punkt ausserhalb oder innerhalb der Ellipse, je nachdem die Summe seiner Abstände von den Brennpunkten grösser oder kleiner als $2a$ ist.

Auf der Definition durch die beiden Brennpunkte beruht die Fadenconstruction der Ellipse, wonach sie ein Stift beschreibt, welcher einen in zwei Punkten F, F' befestigten Faden spannt.

B.: Ferner berührt ein Kreis, der um diesen Ellipsenpunkt P mit einem seiner Brennradien $F'P$ beschrieben ist, den um den anderen Brennpunkt F beschriebenen Kreis vom Radius $2a$. Die Ellipse ist somit der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher einen festen Kreis berührt und durch einen festen Punkt innerhalb desselben geht. Letzterer und der feste Mittelpunkt sind die Brennpunkte, der Kreisdurchmesser ist die Hauptaxe.

§ 88. Die Beziehungen der Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ zu einer zur Hauptaxe nicht normalen Geraden $y=mx+k$ erkennen wir an den gemeinsamen Wurzeln beider Gleichungen. Sie lauten

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=\frac{-ma^2k\pm ab\sqrt{m^2a^2+b^2-k^2}}{m^2a^2+b^2},\ \left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\}=\frac{b^2k\pm mab\sqrt{m^2a^2+b^2-k^2}}{m^2a^2+b^2}.$$

Reelle Schnittpunkte existiren also nur, wenn $m^2a^2+b^2\geqq k^2$ ist, und zwar zwei, die aber in einen zusammenfallen können.

Für die Coordinaten $x_0 \mid y_0$ der Sehnenmitte findet sich

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-ma^2k}{m^2a^2+b^2},\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{b^2k}{m^2a^2+b^2}.$$

Somit hängt das Verhältnis $m'=y_0:x_0=-b^2:ma^2$ nur von der Richtung m der Sehnen ab. Also liegen die Mitten aller parallelen Sehnen auf einem Durchmesser, welcher als conjugirt zur Richtung der Sehnen bezeichnet wird und die Gleichung hat

$$y=m'x \text{ oder } b^2x+ma^2y=0.$$

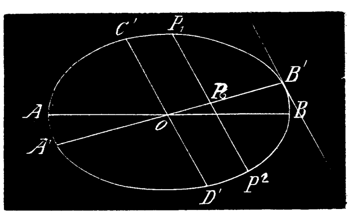
Umgekehrt wird die Gleichung der in einem gegebenen Punkte $x_0 \mid y_0$ der Ellipse halbirten Sehne erhalten, indem man $y-y_0=m(x-x_0)$ mittelst $m=-b^2x_0:a^2y_0$ verwandelt in

$$b^2x_0(x-x_0)+a^2y_0(y-y_0)=0.$$

B.: Ort der Sehnenmitten in den Secanten durch einen Punkt P einer Axe (eine Ellipse).

§ 89. Tangente der Ellipse heisst eine Secante mit vereinigten Schnittpunkten, also mit der Bedingung $k^2=m^2a^2+b^2$ für die Coefficienten ihrer Gleichung. Daher gibt es zwei Tangenten von vorgeschriebener Richtung m, nämlich

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}.$$



Ihre Berührungspunkte sind die Endpunkte des der Richtung m conjugirten oder die parallelen Sehnen halbirenden Durchmessers $b^2x+ma^2y=0$, da sich die Sehnenendpunkte durch parallele Verschiebung der Secante nur auf diesem vereinigen können.

Umgekehrt ist die Tangente in einem Punkte $x_1 \mid y_1$ der Ellipse diejenige Gerade, welche durch ihn parallel zu den Sehnen läuft, die durch seinen Durchmesser halbirt werden. Aus der Schlussgleichung des § 88 folgt daher für $x_0=x_1$, $y_0=y_1$ unter Berücksichtigung von $b^2x_1{}^2+a^2y_1{}^2=a^2b^2$ als die Gleichung der in $x_1 \mid y_1$ berührenden Ellipsentangente

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2 \text{ oder } \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

Man beachte wiederum diese Bildung aus der Gleichung der Curve, indem statt der Quadrate der Veränderlichen die Producte einer constanten und einer laufenden Coordinate treten (§ 47).

B.: Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel die Ellipse berühren (Schnittpunkt der Tangenten m und $-1:m$ liegt auf dem Kreise $x^2+y^2=a^2+b^2$).

§ 90. Eine Gerade schneidet also die Ellipse oder schneidet sie nicht, je nachdem ihr Abstand vom Centrum kleiner oder grösser als der Abstand der parallelen Tangente ist. Dessen Quadrat ist aber (§ 31)

$$\frac{m^2 a^2 + b^2}{m^2 + 1} = a^2 - \frac{c^2}{m^2 + 1}.$$

Nun hedeutet $c : \sqrt{m^2 + 1}$ die Projection der halben Focaldistanz auf die Tangente. Demnach hat der Fusspunkt der vom Brennpunkt auf die Tangente gefällten Normalen einen unveränderlichen Abstand a vom Mittelpunkt oder liegt stets auf dem äusseren Scheitelkreis $x^2 + y^2 = a^2$.

Umgekehrt umhüllt der eine Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel einen Kreis durchläuft, während der andere Schenkel durch einen festen Punkt F im Innern des Kreises geht, fortwährend als Tangente eine Ellipse, welche den Kreis zum Scheitelkreis, F zu einem Brennpunkt hat.

Daher gehen durch einen beliebigen Punkt P ausserhalb der Ellipse zwei Tangenten an dieselbe. Denn schlagen wir über FP als Durchmesser einen Kreis, so schneidet dieser den äusseren Scheitelkreis (§ 85) in zwei Punkten Q_1, Q_2. Dann sind PQ_1, PQ_2 die Tangenten, da FQ_1P und FQ_2P rechte Winkel sind. Die Tangenten von vorgeschriebener Richtung gehen daher durch die Schnittpunkte des Scheitelkreises mit der zu ihnen normalen Sehne aus dem Brennpunkt.

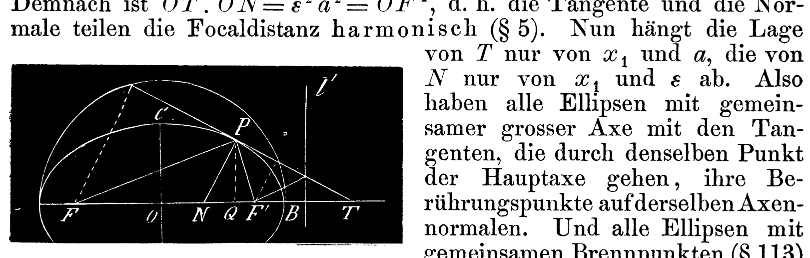
§ 91. Die Normale der Tangente im Berührungspunkte $x_1 | y_1$ heisst Normale der Ellipse in $x_1 | y_1$ und hat die Gleichung

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1) \text{ oder } a^2 y_1 x - b^2 x_1 y - c^2 x_1 y_1 = 0.$$

Für die Schnittpunkte T und N von Tangente und Normale mit der Hauptaxe ergibt sich durch Einsetzung von $y = 0$

$$OT = \frac{a^2}{x_1}, \quad ON = \frac{c^2}{a^2} x_1 = \varepsilon^2 x_1.$$

Demnach ist $OT . ON = \varepsilon^2 a^2 = OF^2$, d. h. die Tangente und die Normale teilen die Focaldistanz harmonisch (§ 5). Nun hängt die Lage von T nur von x_1 und a, die von N nur von x_1 und ε ab. Also haben alle Ellipsen mit gemeinsamer grosser Axe mit den Tangenten, die durch denselben Punkt der Hauptaxe gehen, ihre Berührungspunkte auf derselben Axennormalen. Und alle Ellipsen mit gemeinsamen Brennpunkten (§ 113) haben in Punkten derselben Abscisse Normale, die durch denselben Punkt der Hauptaxe gehen.



Unter den ersteren befindet sich insbesondere auch der äussere Scheitelkreis. Um also in einem Ellipsenpunkte die Tangente zu construiren, bestimmt man ihren Axenschnittpunkt dadurch, dass man in dem Punkte des Scheitelkreises von derselben Abscisse die Tangente zieht.

B.: Der Kreis über dem Stück einer Tangente zwischen den beiden Scheiteltangenten als Durchmesser geht durch die Brennpunkte.

§ 92. Rechnet man von einem Punkte P der Ellipse die Länge der Tangente und der Normalen bis zum Axenschnittpunkt, so heissen ihre Projectionen QT Subtangente und NQ Subnormale. Und zwar ist $QT = \frac{a^2}{x_1} - x_1$, $NQ = \frac{b^2}{a^2} x_1$, ferner ist

$FT = \frac{a^2 + \varepsilon a x_1}{x_1}$, $F'T = \frac{a^2 - \varepsilon a x_1}{x_1}$, $FN = \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon a$, $F'N = \varepsilon^2 x_1 - \varepsilon a$.

Hieraus folgt aber wegen $FP = \varepsilon x_1 + a$, $F'P = -\varepsilon x_1 + a$, dass $FT = \frac{a}{x_1} \cdot FP$, $F'T = \frac{a}{x_1} \cdot F'P$, $FN = \varepsilon \,.\, FP$, $F'N = -\varepsilon \,.\, F'P$, also $FT : F'T = FP : F'P = FN : NF'$. Im Dreieck FPF' teilen also die Punkte N und T die Grundlinie FF' innerlich und äusserlich im Verhältnis der Brennradien, d. h. die Normale PN und die Tangente PT sind die innere und äussere Halbirende des von den Brennradien des Punktes P gebildeten Winkels. Die Tangente der Ellipse in P wird man daher, wenn die Brennpunkte gegeben sind, als äussere Halbirende seines Brennradienwinkels construiren. Auch begründet diese Eigenschaft den Namen Brennpunkte für F, F' physikalisch, da die von dem einen ausgehenden Lichtstrahlen von der Curve nach dem andern reflectirt werden.

Der directe Nachweis dieser Halbirung ist durch Berechnung der Winkel FPN und NPF' aus den Richtungszahlen m, m', m'' von FP, $F'P$, NP leicht. Und zwar findet man für den halben Brennradienwinkel δ

$$tg\,\delta = \frac{\varepsilon a}{b^2} y_1 = \frac{\varepsilon}{p} y_1.$$

Endlich ergibt sich dasselbe, indem man die Abstände der Brennpunkte $\pm \varepsilon a \,|\, 0$ von der Tangente ermittelt und findet

$$FG : FP = 1 : a \sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}} = F'G' : F'P'.$$

B.: Das Rechteck aus den Abständen der Brennpunkte von einer Ellipsentangente ist constant gleich b^2.

§ 93*. Die Gleichungen der Tangente und Normale der Ellipse im Punkte $x_1 \,|\, y_1$ können wiederum (vgl. § 48, 72) auch aus denen der Secante von $x_1 \,|\, y_1$ und $x_2 \,|\, y_2$ und der Mittelnormale ihrer Sehne erhalten werden, indem man den zweiten Punkt sich dem ersten bis zur Vereinigung nähern lässt. Die Richtungszahl der Tangente wird aus der der Secante erst dann durch Einsetzung von $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ erhältlich, wenn man die Umformung vornimmt

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}.$$

Dieselbe ergibt sich aus der Differenz $b^2(x_1^2 - x_2^2) - a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0$ von $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$ und $b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2$. Zugleich ist $-1 : m$ die Richtungszahl der Normalen.

Die beiden Normalen der Ellipse in Punkten $x_1 \,|\, y_1$ und $x_2 \,|\, y_2$ $a^2 y_1 x - b^2 x_1 y - c^2 x_1 y_1 = 0$, $a^2 y_2 x - b^2 x_2 y - c^2 x_2 y_2 = 0$ schneiden sich in einem Punkte $K\ (x_n \,|\, y_n)$, für welchen man findet

$$x_n = \frac{c^2}{a^2} x_1 x_2 \frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}, \quad y_n = \frac{c^2}{b^2} y_1 y_2 \frac{x_1 - x_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}.$$

Nun ist aber $(x_2 y_1 - x_1 y_2) = x_2 (y_1 - y_2) - y_2 (x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(m x_2 - y_2) = (y_1 - y_2)(m x_2 - y_2) : m$. Also wird

$$x_n = \frac{c^2}{a^2} \frac{m x_1 x_2}{m x_2 - y_2}, \; y_n = \frac{c^2}{b^2} \frac{y_1 y_2}{m x_2 - y_2}.$$

Rücken sich nun die Fusspunkte der Normalen beliebig nahe, und geht m mit $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ in die Richtungszahl $-b^2 x_1 : a^2 y_1$ der Tangente in $x_1 | y_1$ über, so wird der Normalenschnittpunkt nicht unbestimmt, sondern nähert sich einer bestimmten Grenzlage K:

$$x_n = \frac{c^2}{a^2} \frac{b^2 x_1^3}{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2} = \frac{c^2}{a^4} x_1^3, \; y_n = -\frac{c^2}{b^4} y_1^3.$$

Dieser Schnittpunkt unendlich naher Normalen heisst der Mittelpunkt der Krümmung der Ellipse im Punkte $x_1 | y_1$.

§ 94*. Die Länge PK, d. h. der Krümmungsradius ϱ, ergibt sich aus

$$\varrho^2 = x_1^2 \left(\frac{c^2}{a^4} x_1^2 - 1 \right)^2 + y_1^2 \left(-\frac{c^2}{b^4} y_1^2 - 1 \right)^2$$

$$= \left(x_1^2 + \frac{a^4}{b^4} y_1^2 \right) \left(\frac{c^2}{a^4} x_1^2 - 1 \right)^2 = \frac{-c^2 x_1^2 + a^4}{b^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2 x_1^2 - a^2}{a^2} \right)^2,$$

oder aus

$$a^2 b^2 \varrho^2 = (a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^3 = \left(\frac{b^2}{a^2} x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2 \right)^3.$$

Derselbe ist demnach am kleinsten in den Hauptscheiteln $x_1 = \pm a$, nämlich $b^2 \varrho^2 = a^4 (1 - \varepsilon^2)^3$, also $\varrho = b^2 : a = p$, gleich dem Halbparameter; am grössten ist ϱ in den Nebenscheiteln $x_1 = 0$, nämlich $\varrho = a^2 : b$. Diese beiden Krümmungsmittelpunkte der Scheitel sind die Schnittpunkte der Axen mit den aus den Ecken des umgeschriebenen Rechtecks auf die Diagonalen gefällten Normalen, da sich aus dieser Figur die vorigen Proportionen sofort ergeben. Der Krümmungsradius wächst vom Haupt- zum Nebenscheitel fortwährend.

Der Kreis vom Mittelpunkt $K (x_n | y_n)$ und Radius ϱ heisst der Krümmungskreis der Ellipse im Punkte $x_1 | y_1$. Dieser Kreis hat im Fusspunkt der Normalen eine besonders enge Berührung mit der Ellipse, denn eigentlich sind drei Schnittpunkte der beiden Curven im Berührungspunkt vereinigt.

§ 95. Wenn zwischen zwei Richtungszahlen m und m' die Relation besteht

$$m m' = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{p}{a},$$

so werden die Sehnen der einen Richtung je von dem Durchmesser der andern Richtung halbirt. Denn zur Richtung m ist conjugirt der Durchmesser $b^2 x + m a^2 y = 0$ oder $m' x - y = 0$ und zur Richtung m' ebenso $b^2 x + m' a^2 y = 0$ oder $m x - y = 0$ (§ 88). Zwei Durchmesser, deren jeder die zum andern parallelen Sehnen halbirt, heissen conjugirte oder zugeordnete Durchmesser. Daher bilden die Tangenten in den Endpunkten zweier conjugirter Durchmesser ein Parallelogramm, welches der Ellipse in den Seitenmitten umgeschrieben ist. Die Diagonalen sind wieder conjugirte Durchmesser, da sie je zwei Sehnen der Seitenmitten halbiren und je zweien parallel sind.

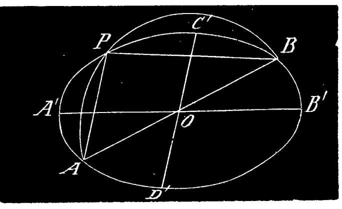
Überhaupt schneiden sich die Tangenten zu zwei Punkten $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ auf dem ihrer Sehne conjugirten Durchmesser. Denn die Differenz der Gleichungen dieser Tangenten (§ 89) wird

$$\frac{x_1 - x_2}{a^2} x + \frac{y - y_2}{b^2} y = 0 \text{ oder } \frac{x}{a^2} + m \frac{y}{b^2} = 0,$$

wo m die Richtung der Sehne, die Gleichung also den Durchmesser m' angibt.

§ 96. Zwei conjugirte Durchmesser liegen in verschiedenen Quadranten, d. h. sind je durch die Axen getrennt, da ihre Richtungszahlen verschiedene Vorzeichen haben müssen. Es gibt nur ein Paar conjugirter Durchmesser, welches in Bezug auf die Axen symmetrisch ist, nämlich für $m = -m' = b : a$ das Paar der Diagonalen im Rechteck der Scheiteltangenten. Ebenso gibt es nur ein Paar von zu einander normalen conjugirten Durchmessern, denn dieselben müssen die Bedingung $m m' = -1$ erfüllen. Diese ist aber, so lange b von a verschieden ist, nur erfüllbar neben der obigen Relation, wenn $m = 0$, $m' = \infty$ ist, denn nur $0 . \infty$ ist ein Product, welches verschiedene Werte $-b^2 : a^2$ und -1 annehmen kann. Also sind die Axen der Ellipse ihre normalen conjugirten Durchmesser. Dagegen sind im Kreise, wo $a = b$ ist, conjugirte Durchmesser stets normal.

Laut Definition sind in einem eingeschriebenen Dreiecke, dessen eine Seite ein Durchmesser ist, die beiden andern Seiten zu conjugirten Durchmessern parallel, denn diese halbiren die Seiten. Sehnen, welche einen Ellipsenpunkt mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, heissen Supplementarsehnen.



Um überhaupt ein Paar conjugirter Durchmesser zu finden, die einen vorgeschriebenen Winkel ω, den Conjugationswinkel, einschliessen, construire man über einem beliebigen Durchmesser zwei Supplementarsehnen, deren gemeinsamer Punkt auf dem Kreise liegt, welcher den Durchmesser unter dem gegebenen Peripheriewinkel ω spannt (§ 63). Nun schneiden aber nicht stets solche Kreise noch in weiteren Punkten, z. B. die durch die Nebenscheitel gehenden nur dann, wenn einer ihrer Hauptaxenabschnitte der Grösse nach zwischen b und a liegt. Also muss sich der Conjugationswinkel ω zwischen den durch $1 > tg \frac{\omega}{2} > b : a$ gegebenen Grenzen befinden.

§ 97. Ist A $(x' | y')$ ein Endpunkt eines Durchmessers AB, so haben die Endpunkte des conjugirten Durchmessers CD Coordinaten $x'' | y''$ vom Verhältnis $y'' : x'' = -b^2 x' : a^2 y'$, also sind

$$x'' = \pm \frac{a}{b} y', \; y'' = \mp \frac{b}{a} x',$$

wie sich bei der Einsetzung ergibt. Auf jedem Scheitelkreis entsprechen diesen daher Punkte $x' | Y'$, $x'' | Y''$ und $X' | y'$, $X'' | y''$ (§ 85), welche Endpunkte rechtwinkliger Kreisdurchmesser sind. Dies erlaubt eine neue Construction der conjugirten Ellipsendurchmesser.

Bezeichnet man nun die Halbmesser $OA = a'$, $OC = b'$, so ist

$$a'^2 = x'^2 + y'^2,\quad b'^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2,$$

folglich $\quad a'^2 + b'^2 = (b^2 x'^2 + a^2 y'^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = a^2 + b^2.$

Somit ist die Summe der Quadrate von zwei conjugirten Halbmessern constant, nämlich gleich der Summe der Quadrate der Halbaxen.

Ferner ist der Inhalt des durch a' und b' gebildeten Parallelogramms mit dem Conjugationswinkel ω bei O nach der Trigonometrie oder nach § 16

$$a' b' \sin \omega = x' y'' - x'' y' = \frac{b}{a} x'^2 + \frac{a}{b} y'^2 = a b,$$

d. h. constant. Somit ist der Inhalt eines von conjugirten Tangentenpaaren gebildeten umgeschriebenen Parallelogramms constant, und zwar gleich dem Inhalt des Rechteckes der Scheiteltangenten. Halb so gross ist jeweilen das eingeschriebene Parallelogramm mit conjugirten Durchmessern als Diagonalen.

Umgekehrt berechnet man, wenn der Winkel ω vorgeschrieben ist, die Längen der ihn einschliessenden conjugirten Durchmesser. Insbesondere haben gleich lange conjugirte Durchmesser (§ 95) folgende Länge $a' = b'$ und folgenden Winkel ω

$$a' = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},\ \sin \omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

B.: Unter den Paaren conjugirter Durchmesser haben die Axen die kleinste, die gleich langen Durchmesser die grösste Summe.

§ 98*. Die Gleichung $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2$ stellt auch, wenn der Punkt $x_1 \,|\, y_1$ nicht auf der Curve liegt, eine Gerade dar, welche ihm durch die Ellipse zugeordnet ist. Sie heisst dann Polare des Pols $x_1 \,|\, y_1$ in Bezug auf die Ellipse. Ihre Richtungszahl ist $m' = -b^2 x_1 : a^2 y_1$, also ist die Richtung der Polaren dem Durchmesser conjugirt, welcher durch den Punkt $x_1 \,|\, y_1$ geht und die Gleichung $y_1 x - x_1 y = 0$ hat. Der Schnittpunkt $x_0 \,|\, y_0$ desselben mit der Polaren hat die Coordinaten

$$x_0 = x_1 : \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right),\ y_0 = y_1 : \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right).$$

Daher ist das Product seines Mittelpunktsabstandes $\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)}$ und dem des Pols $\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}$ gleich $(x_1^2 + y_1^2) : \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)$. Nun findet sich aber die Länge des Halbmessers von der Richtungszahl $y_1 : x_1$ gerade als die Quadratwurzel aus dem vorigen Ausdruck. Nach § 5 teilen also $x_1 \,|\, y_1$ und $x_0 \,|\, y_0$ diesen Durchmesser harmonisch. Daher ist die Polare eines Pols die Gerade, welche den Durchmesser des Pols mit dem Pol harmonisch teilt und deren Richtung diesem Durchmesser conjugirt ist.

Insbesondere ist die Polare eines unendlich fernen Punktes der seiner Richtung conjugirte Durchmesser. Denn, ist $x' = \infty$, $y' = \infty$, aber $y' : x' = m$, so geht die Gleichung $b^2 x + m a^2 y = \dfrac{a^2 b^2}{x_1}$ über in

$b^2 x + m a^2 y = 0$ oder $m' x - y = 0$. Die Polare eines Punktes der Ellipse ist die in ihm berührende Tangente, wie aus der Übereinstimmung der Gleichungsform hervorgeht. Die Polare des Brennpunktes $\pm \varepsilon a \mid 0$ ist die zugehörige Leitgerade $\pm \varepsilon x = a$.

Von zwei Punkten $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, deren Coordinaten die Relation erfüllen

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 1, \text{ oder } b^2 x_1 x_2 + a^2 y_1 y_2 = a^2 b^2,$$

liegt jeder auf der Polaren des andern, denn die Gleichungen dieser Polaren sind $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2$ und $b^2 x_2 x + a^2 y_2 y = a^2 b^2$. Wenn also $x_2 \mid y_2$ auf der Polaren von $x_1 \mid y_1$ liegt, so geht die Polare von $x_2 \mid y_2$ durch $x_1 \mid y_1$. So geht die Polare eines beliebigen Punktes der Leitgeraden durch den zugehörigen Brennpunkt.

§ 99*. Liegt der Punkt $x_1 \mid y_1$ ausserhalb der Ellipse, so gehen von ihm aus zwei Tangenten an die Ellipse. Denn seine Polare schneidet die Ellipse, weil ihr Durchmesser-Schnittpunkt $x_0 \mid y_0$ sicher innerhalb der Ellipse liegt. Die beiden Schnittpunkte $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$ sind aber die Berührungspunkte zweier Tangenten, welche den Punkt $x_1 \mid y_1$ enthalten. Denn die Relationen $b^2 x_1 x' + a^2 y_1 y' = a^2 b^2$, $b^2 x_1 x'' + a^2 y_1 y'' = a^2 b^2$ bedeuten sowol, dass $x' \mid y'$, $x'' \mid y''$ auf $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2$ liegen, als dass ihre Tangenten durch $x_1 \mid y_1$ gehen (vgl. § 98). Die Polare eines äusseren Punktes ist somit seine Berührungssehne.

Die beiden Tangenten aus P können entweder durch ihre Berührungspunkte auf der Polaren oder nach § 90 ermittelt werden, wo dann umgekehrt die Polare die Berührungspunkte liefert. Man kann auch den Satz des § 91 benutzen, wonach die Axenschnittpunkte der Tangente und der Normalen durch F, F' harmonisch getrennt sind.

Die Polare eines unendlich fernen Punktes ist der conjugirte Durchmesser als Berührungssehne der parallelen Tangenten (§ 89). Es geht aber auch für $x_1 = \infty$, $y_1 = m x_1$ die Gleichung $b^2 x + m a^2 y = a^2 b^2 : x_1$ über in $b^2 x + m a^2 y = 0$. Die Polare eines Punktes der Leitgeraden ist im Brennpunkt auf seiner Verbindungsgeraden mit dem Pol normal. Denn für einen Punkt mit $x_1 = \pm a : \varepsilon$ ist die Richtungszahl der Polaren $\mp b^2 : \varepsilon a y_1$, während $y_1 : (x_1 \mp \varepsilon a) = \pm \varepsilon y_1 : (1 - \varepsilon^2) a = \pm \varepsilon a y_1 : b^2$ ist. Das Tangentenstück zwischen dem Berührungspunkt und dem Schnittpunkt mit der Leitgeraden wird vom Brennpunkt aus unter rechtem Winkel gesehen.

§ 100*. Die Axen erscheinen in ihren Eigenschaften als das ausgezeichnete (rechtwinklige) Paar conjugirter Durchmesser. Man wird daher die Axengleichung etwa als Specialfall einer Ellipsengleichung betrachten müssen, welche auf zwei conjugirte Durchmesser als Coordinatenaxen bezogen ist. Sind a' und b' die Längen deren Halbmesser, so lautet die Gleichung in schiefen Coordinaten

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 1 \text{ oder } b'^2 X^2 + a'^2 Y^2 = a'^2 b'^2.$$

In der Tat ist dadurch eine Curve dargestellt, welche von jeder Geraden in höchstens zwei Punkten getroffen wird (§ 88), deren Sehne in einer Axenparallelen je durch die andere Axe halbirt wird (§ 95, Fig. § 96) und deren Axenschnittpunkte $\pm a' \mid 0$, $0 \mid \pm b'$ sind.

Wirklich erhält man diese Form durch Transformation. Zuerst führt man eine Drehung ϑ des Axenpaares aus, bis die neue x'-Axe mit dem Durchmesser a' zusammenfällt; dann lässt man durch eine Neigungstransformation (ω) die y'-Axe mit der conjugirten zur Deckung kommen. Nun führt aber (§ 14)

$$b^2(x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta)^2 + a^2(x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)^2 = a^2b^2,$$

weil nach § 97 $\quad b^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta = a^2b^2 : a'^2 = b'^2\sin^2\omega$,

$b^2\sin^2\vartheta + a^2\cos^2\vartheta = a^2 + b^2 - (b^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta) = a'^2 + b'^2\cos^2\omega$

ist, zu dem vorläufigen Ergebnisse

$$b'^2\sin^2\omega \,.\, x'^2 + (a'^2 + b'^2\cos^2\omega)\,y'^2 + c^2x'y'\sin 2\vartheta = a'^2b'^2\sin^2\omega.$$

Ferner ist auch $c^2\sin 2\vartheta = -b'^2\sin 2\omega$, da die Relation $a^2mm' + b^2 = 0$ (§ 95) liefert $a^2 tg\vartheta tg(\omega + \vartheta) + b^2 = 0$ oder $a^2 tg^2\vartheta + b^2 = -c^2 tg\vartheta tg\omega$, somit $a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta = b'^2\sin^2\omega = -c^2\sin\vartheta\cos\vartheta\, tg\,\omega$.

Somit ist das Resultat der ersten Transformation zu schreiben

$$b'^2(x'\sin\omega - y'\cos\omega)^2 + a'^2y'^2 = a'^2b'^2\sin^2\omega.$$

Allein vermöge der Neigungstransformation ist

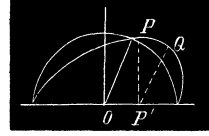
$$y' = Y\sin\omega \text{ und } x'\sin\omega - y'\cos\omega = X\sin\omega,$$

so dass schliesslich $(b'^2X^2 + a'^2Y^2)\sin^2\omega = a'^2b'^2\sin^2\omega$ oder das obige entsteht.

In diesen schiefen Coordinaten behalten auch Durchmesser, Tangenten und Polaren dieselben Gleichungsformen.

§ 101*. Bemerkenswert ist die Vereinfachung, welche dadurch erzielt wird, dass man die gleich langen conjugirten Durchmesser (§ 97) zu Axen wählt. Denn ist $a'^2 = b'^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, so haben wir in schiefen Coordinaten die Gleichung der Ellipse

$$X^2 + Y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} = a'^2$$



in derselben Form, wie die Kreisgleichung in rechtwinkligen Coordinaten.

Dies enthält eine neue Construction der Ellipse aus einem Kreise. Dreht man alle parallelen Kreisordinaten um ihre Schnittpunkte mit dem normalen Durchmesser um einen constanten Winkel, so bilden ihre Endpunkte eine Ellipse. Dieselbe besitzt als gleich lange conjugirte Durchmesser den festen Durchmesser und denjenigen, der durch die Drehung aus dem normalen Kreisdurchmesser entstanden ist.

Endlich geht aus $X'^2 + Y'^2 = a'^2$ die allgemeine Gleichung des § 100* wieder hervor, wenn wir setzen $X' = X$, $Y' : Y = a' : b'$, d. h. indem wir die zur X-Axe conjugirten Sehnen proportional ändern wie in § 85. So kann auch eine Ellipse von willkürlich gegebenen conjugirten Durchmessern mittelst des Kreises über einem derselben construirt werden.

§ 102. Vergleicht man die zwischen irgend zwei zur Hauptaxe normalen Sehnen eingeschlossenen Trapeze, von welchen eines der Ellipse, eines dem äusseren Scheitelkreis eingeschrieben ist, so verhalten sich deren Inhalte wie die Ordinaten, also wie $b : a$ (§ 85). Denn $MM'Q'Q : PP'Q'Q = (QM + Q'M') : (QP + Q'P') = b : a$. Somit steht auch jedes der Ellipse eingeschriebene Vieleck von beliebiger Eckenzahl zu dem dem Scheitelkreis eingeschriebenen Vieleck, dessen Ecken die-

selben Abscissen haben, in diesem Verhältnis. Je näher sich nun die Ecken auf der Ellipse folgen, desto weniger unterscheidet sich das Vieleck von der Curve und das entsprechende vom Kreise selbst. Dasselbe gilt aber auch für die umgeschriebenen Vielecke, deren Seiten in jenen Punkten berühren (§ 91).

Der Inhalt der Ellipse ist also zwischen entprechende Näherungswerte eingeschlossen, wie der Kreisinhalt πa^2. Also ist der Ellipseninhalt

$$E = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi a b.$$

Ebenso verhält sich das durch eine Ordinate abgeschnittene Ellipsensegment zu dem entsprechenden Kreissegment wie b zu a. Dasselbe gilt auch von den jene Segmente enthaltenden Sectoren der Ellipse und des Kreises.

Bedenken wir endlich, dass nach § 97 auch

$$E = \pi a' b' \sin \omega$$

ist, so kann dies nach der neuen Construction der Ellipse in § 101 ganz ebenso direct bewiesen werden wie vorhin.

B.: Inhalt der Ellipse $a = 5$, $b = 4$ (62,832), Segment (7,040) und Sector (16,961) zu der Sehne von den Ordinaten $y = \pm 3$.

VI. Die Hyperbel.

§ 103. Der Ort eines Punktes, der sich so bewegt, dass sein Abstand von einem festen Brennpunkte (Brennradius) in einem vorgeschriebenen Verhältnis ε grösser ist als sein Abstand von einer festen Leitgeraden (Leitabstand), heisst Hyperbel. Für die analytische Untersuchung dieser Curve gelten somit die Entwickelungen der § 80—82 unverändert, nur dass die Excentricität ε ein unechter Bruch oder die Differenz $1 - \varepsilon^2$ negativ ist.

Nimmt man wiederum die Symmetrieaxe FG zur x-Axe und als Nullpunkt den die Strecke FG im Verhältnis ε teilenden Scheitel S, so lautet die Scheitelgleichung der Hyperbel

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1) x^2.$$

Die Verschiedenheit in der Grösse von ε bedingt eine ganz andere Form der Curve. Sie hat mit ihrer Symmetrie- oder Hauptaxe zwei Scheitel S, S' gemein, nämlich (für $y = 0$) $x = 0$ und $x = -2a$, wenn abkürzend gesetzt wird

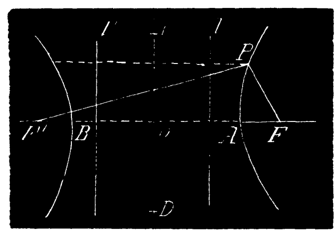
$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Der zweite Scheitel S' liegt in diesem Falle also auf der negativen x-Axe.

Ist nun x eine negative Zahl und absolut $< 2a$, so ist die rechte Seite der Gleichung negativ, d. h. y nicht reell. Somit liegt zwischen den beiden Geraden $x = 0$ und $x = -2a$ kein Punkt der Hyperbel. Dagegen gehören zu jeder positiven oder einer negativen Abscisse, deren absoluter Wert $> 2a$ ist, positive Werte für y^2, also je zwei reelle symmetrische Punkte der Hyperbel. Die Hyperbel besteht also aus zwei im Endlichen völlig getrennten Ästen, welche sich bis ins Unendliche erstrecken.

§ 104. Dagegen gehören zu jedem beliebigen Werte der Ordinate y zwei reelle Abscissenwerte (vgl. § 83)

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + (\varepsilon^2 - 1)\, y^2}}{\varepsilon^2 - 1} = -a \pm \sqrt{a^2 + \frac{y^2}{\varepsilon^2 - 1}},$$



d. h. jede Parallele zur Hauptaxe schneidet die Hyperbel in zwei Punkten, jeden Ast in einem. Dabei ist die begrenzte Sehne $x_1 - x_2$ am kleinsten für $y = 0$, nämlich gleich der Hauptaxe $2\,a$. Nun ist aber $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -a$, also liegt die Mitte je zweier Schnittpunkte auf der festen Geraden $x = -a$. Die beiden Äste der Hyperbel liegen also auch symmetrisch in Bezug auf eine zweite Symmetrieaxe, welche wieder Nebenaxe der Hyperbel heisst. Der Axenschnittpunkt ist der Mittelpunkt der Hyperbel.

Die Nebenaxe hat mit der Curve keine reellen Scheitel gemein. Man findet nämlich für $x = -a$ aus der Gleichung $y^2 = -(\varepsilon^2 - 1)\, a^2 = -b^2$ oder $y = \pm a \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{-1} = \pm b \sqrt{-1}$, wenn man zur Abkürzung setzt

$$b = a \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}.$$

Man nennt diese Zahl, welche ähnlichen Nutzen hat wie die gleichbezeichnete für die Ellipse, wiederum halbe Länge der Nebenaxe, hat sich aber stets zu erinnern, dass die Punkte $0 \mid \pm b$, die wieder Nebenscheitel heissen, nicht auf der Hyperbel liegen.

§ 105. Die beiden Constanten ε und p können wiederum aus den beiden Halbaxen a und b völlig bestimmt werden, denn es ist (vgl. § 84)

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2},\ p = \frac{b^2}{a},\ \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{c}{a}.$$

Also schreibt sich mittelst der neuen Constanten die Scheitelgleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2\,a\,x + x^2).$$

Um sie nun auf ihre Axen als Coordinatenaxen zu beziehen, hat man nur $x - a$ durch x zu ersetzen und erhält die Axengleichung der Hyperbel

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

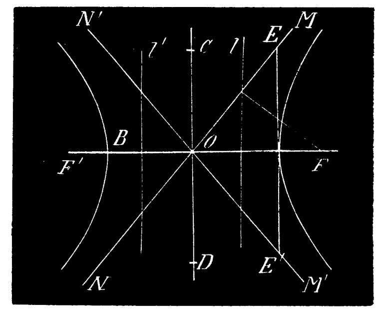
Diese zeigt unmittelbar die Symmetrie in Bezug auf die Coordinatenaxen sowie auf den Nullpunkt.

Daher besitzt die Curve zu F und l ein symmetrisches, aber auf der negativen Seite der y-Axe liegendes Paar F' und l', also zwei Brennpunkte und zugehörige Leitgeraden. Die zur Ordinate $p = b^2 : a$ gehörigen Abscissen der Brennpunkte sind $\pm \sqrt{a^2 + b^2} = \pm c = \pm \varepsilon\, a$. Also ist die halbe Focaldistanz c der Hyperbel gleich der Entfernung eines Nebenscheitels von einem Hauptscheitel. Die Abstände der Leitgeraden vom Mittelpunkt sind wiederum $\pm a : \varepsilon$ (vgl. § 86).

Hiernach tritt der Unterschied zwischen Ellipse und Hyperbel in einer analytisch sehr leicht fassbaren Weise auf. Die Axengleichungen der Hyperbel und der Ellipse unterscheiden sich wesentlich nur im Vorzeichen von b^2. Alle aus jener abgeleiteten Eigenschaften der Ellipse führen daher dadurch zu analogen für die Hyperbel, dass in den Entwickelungen und Resultaten nur $-b^2$ statt b^2 gesetzt wird.

§ 106. Eine Eigenschaft der Hyperbel ist jedoch ohne Analogie bei der Ellipse: das Auftreten unendlich ferner Curvenpunkte. Denn es gibt auch Wertepaare $x=\infty$, $y=\infty$, welche die Gleichung befriedigen, wenn wir nur ihrem Verhältnis einen festen Wert $y:x=m$ beilegen. Dividiren wir die Gleichung durch x^2, so wird $a^2 b^2 : x^2$ schliesslich für $x=\infty$ verschwindend klein und es bleibt $b^2 - a^2 m^2 = 0$, also $m = \pm b:a$ als die Richtungszahlen der unendlich fernen Curvenpunkte.

Ziehen wir also in dem Rechteck, dessen Seiten $2a$ und $2b$ durch die Axen halbirt werden, die Diagonalen, so gehören deren unendlich ferne Punkte (Richtungen) der Hyperbel an. Diese Diagonalen enthalten keinen endlichen Punkt der Hyperbel, denn setzen wir für x und y das k-fache von a und b ein, so kann die Gleichung nicht erfüllt sein. Vielmehr nähert sich die Curve unbegrenzt jenen Diagonalen, ohne sie im Endlichen zu erreichen. Daher heissen die Geraden von den Gleichungen



$$b x \mp a y = 0$$

die Asymptoten der Hyperbel. Wirklich gehört zu einer Abcisse x in der Hyperbel die Ordinate $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, in der Asymptote aber $Y = \frac{b}{a}x$, ein Wert, welchem jener kleinere (y) um so näher kommt, je grösser x wird.

Die Hyperbeläste verlaufen also ganz innerhalb zweier Scheitelwinkel der Asymptoten, der Asymptotenwinkel 2φ. Der halbe Winkel ist bestimmbar durch

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a},\ \cos\varphi = \frac{a}{c} = \frac{1}{\varepsilon},\ \left(\sin\varphi = \frac{b}{c}\right),$$

d. h. die Tangente von φ gibt das Axenverhältnis $b:a$, der Cosinus von φ das Reciproke der Excentricität ε an.

§ 107. Es gibt jeweilen eine Hyperbel, welche in den Nebenwinkeln desselben Asymptotenpaares liegt. Ihre Hauptaxe ist die Nebenaxe $2b$ der gegebenen (in der y-Axe), ihre Nebenaxe die Hauptaxe $2a$ derselben (in der x-Axe). Sie heisst die zur gegebenen conjugirte Hyperbel und hat die Gleichung

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2 \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

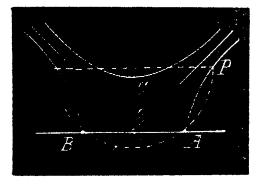
Von den durch den Mittelpunkt gehenden Strahlen, d. h. Durchmessern, enthalten die im Asymptotenwinkel gelegenen und nur

diese zwei symmetrische Punkte der Hyperbel. Denn setzen wir $y = m x$, so gibt die Gleichung $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, $x^2 (b^2 - m^2 a^2) = a^2 b^2$ und diese ist nur reell zu befriedigen für $m^2 a^2 < b^2$. Diese Durchmesser mit reellen Endpunkten heissen Hauptdurchmesser der Hyperbel. Die im Nebenwinkel liegenden Durchmesser enthalten dagegen reelle Punkte der conjugirten Hyperbel; diese werden als Nebendurchmesser der gegebenen Hyperbel bezeichnet.

Je nachdem der Asymptotenwinkel 2φ spitz, recht oder stumpf ist, unterscheidet man spitz-, recht- und stumpfwinklige Hyperbeln. In denselben ist die Nebenaxe kleiner, gleich oder grösser wie die Hauptaxe, die Excentricität grösser, gleich oder kleiner wie $\sqrt{2}$. Von zwei conjugirten Hyperbeln ist die eine spitz-, die andere stumpfwinklig, oder beide sind rechtwinklig und dann congruent.

B.: Asymptotenwinkel der Hyperbel mit der Hauptaxe 5, der Nebenaxe 3 ($\varphi = 30^\circ\, 58'$).

§ 108. Die rechtwinklige Hyperbel hat die einfachere Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ oder $y^2 = x^2 - a^2$.



Dieselbe lässt erkennen, dass diese specielle Hyperbel unter den allgemeinen eine ähnlich ausgezeichnete Rolle spielt, wie der Kreis unter den Ellipsen (§ 84). Die Abscisse ist Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck aus Ordinate y und Halbaxe a. Daher schneidet ein Kreis vom Centrum $0 \mid y$ und vom Radius x, welcher durch die Scheitel $\pm a \mid 0$ geht, seinen zur Hauptaxe parallelen Durchmesser in Punkten $\pm x \mid y$ der rechtwinkligen Hyperbel. In einem Kreisbüschel mit Grundpunkten A, B (§ 64*) bilden die Endpunkte der zur Centralen normalen Durchmesser eine rechtwinklige Hyperbel, welche die Hauptscheitel S, S' besitzt.

Eine andere Erzeugung liegt in der Gleichungsform ausgesprochen

$$\frac{y}{x - a} = \frac{x + a}{y} \text{ oder } tg\, \alpha = ctg\, \alpha',$$

wo α und α' die Neigungswinkel zweier von $a \mid 0$ und $-a \mid 0$ ausgehenden Strahlen sind. Die Punkte der rechtwinkligen Hyperbel sind also die Schnittpunkte je zweier Strahlen aus A und B, welche gegen eine Vectorgerade von der Richtungszahl 45° gleich geneigt sind ($\alpha' - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$). Auch dies gibt eine Construction.

Die allgemeine Hyperbel von den Axen $2a$, $2b$ kann man aus der rechtwinkligen Hyperbel von derselben Hauptaxe $2a$ wiederum (§ 85) dadurch erhalten, dass man die Ordinaten y der letzteren in constantem Verhältnis $b : a$ ändert in $Y = a y : b$.

§ 109. Die Brennradien eines Punktes $x' \mid y'$ jeder Hyperbel folgen aus der ursprünglichen Focalgleichung wie in § 87 als die Werte $FP = \pm (\varepsilon x' - a)$, $F'P = \pm (\varepsilon x' + a)$. Dabei ist für irgend einen Punkt P des F umschliessenden Curvenzweiges das obere, für Punkte des F' umschliessenden das untere Zeichen zu nehmen, um die Länge der Brennradien positiv zu erhalten.

Daraus folgt $F'P - FP = \pm 2a$, d. h. für einen Punkt jedes Astes ist der Brennradius des umschlossenen Brennpunktes um die Länge der Hauptaxe kleiner als der andere Brennradius. Daher ist die Hyperbel auch der Ort eines beweglichen Punktes, dessen Abstände von zwei festen Punkten eine constante Differenz haben. Dasselbe geht schon daraus hervor, dass der Brennradius je das ε-fache des zugehörigen Leitabstands ist. Diese Abstände werden aber von beiden Leitlinien aus im gleichen Sinn gemessen und haben daher eine Differenz gleich dem Abstande der Leitlinien selbst.

Diese Definition mittelst Hauptaxe SS' und Brennpunkten FF' ergibt folgende Construction. Man nehme in der Verlängerung der Strecke $F'F$ den Punkt Q beliebig und beschreibe aus F' mit $S'Q$, aus F mit SQ als Radien Kreise. Dieselben schneiden sich in zwei Hyperbelpunkten. Mechanisch erzeugt man einen Hyperbelbogen, indem man an einem um F drehbaren Lineal einen von F' ausgehenden Faden befestigt, welcher durch den zeichnenden Stift längs des Lineals angespannt wird. Die Differenz zwischen der Länge des Fadens und des Lineals ist gleich der Hauptaxe.

Endlich ergibt sich auch eine directe Herleitung der Axengleichung aus der unmittelbaren, irrationalen Form der Definition (vgl. § 87)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

B.: Das Rechteck der Brennpunktsabstände von einer Tangente ist constant.

§ 110. Die Gerade $y = mx + k$ schneidet die Hyperbel von der Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ in den beiden reellen Punkten

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \frac{-ma^2k \pm ab\sqrt{b^2-m^2a^2+k^2}}{m^2a^2-b^2}, \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} = \frac{-b^2k \pm ab\sqrt{b^2-m^2a^2+k^2}}{m^2a^2-b^2},$$

wenn $b^2 + k^2 > m^2a^2$ ist. Unter diesen Secanten sind aber zwei Gruppen zu unterscheiden. Ist nämlich schon $b^2 > m^2a^2$, d. h. ist die Neigung der Geraden absolut kleiner als der halbe Asymptotenwinkel φ, so schneidet sie die Hyperbel stets reell in zwei verschiedenen Punkten, nämlich jeden Hyperbelast in einem Punkte. Dann ist die Quadratwurzel nämlich stets reell, ferner das Product $(m^2a^2-b^2)^2x_1x_2 = m^2a^4k^2 - a^2b^2(b^2-m^2a^2+k^2) = a^2(b^2+k^2)(m^2a^2-b^2) < 0$ negativ; also haben x_1 und x_2 entgegengesetzte Vorzeichen. Ist dagegen $b^2 < m^2a^2$, d. h. die Neigung der Geraden grösser als φ, so muss k^2 eine gewisse Grösse $m^2a^2 - b^2$ überschreiten, damit reelle Schnittpunkte und zwar beide auf demselben Aste entstehen $(x_1x_2 > 0)$. Dafür schneiden alle diese Geraden die conjugirte Hyperbel (§ 108).

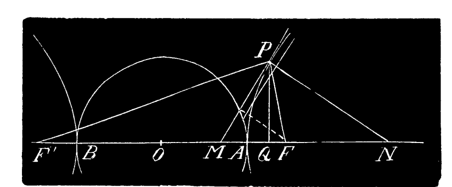
In allen Fällen ist für die Coordinaten $x_0 \mid y_0$ der Sehnenmitte

$$x_0 = \frac{-ma^2k}{m^2a^2-b^2}, \; y_0 = \frac{-b^2k}{m^2a^2-b^2}, \text{ also } m' = \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{m}\frac{b^2}{a^2}.$$

Daher liegen die Mitten aller parallelen Sehnen wieder, wie bei der Ellipse, auf einem Durchmesser, der ihrer Richtung conjugirt heisst. Derselbe schneidet die Hyperbel oder schneidet sie nicht, je nachdem $m'^2 \lesseqgtr b^2 : a^2$, also $m^2 \gtreqless b^2 : a^2$ ist. Also werden die Sehnen je eines Astes durch einen Haupt-, die Sehnen zwischen beiden Ästen durch einen Neben-Durchmesser halbirt.

Umgekehrt geht durch jeden Punkt $x_0 \mid y_0$ eine in ihm halbirte Hyperbelsehne $b^2 x_0 (x - x_0) - a^2 y_0 (y - y_0) = 0$.

§ 111. Die Schnittpunkte einer Geraden mit der Hyperbel sind vereinigt, wenn $k^2 = m^2 a^2 - b^2$, also $m^2 > b^2 : a^2$ ist. Daher gibt es Tangenten der Hyperbel nur unter den Systemen paralleler Secanten je desselben Astes und zwar an jeden Ast eine Tangente vorgeschriebener Richtung. Denn die Gleichungen sind



$$y = m x \pm \sqrt{m^2 a^2 - b^2}.$$

Die Berührungspunkte sind die Endpunkte P, P' des conjugirten Hauptdurchmessers m'.

Daher entsteht aus der vorigen Schlussgleichung die Gleichung der im Punkte $x_1 \mid y_1$ berührenden Tangente (für $x_0 = x_1, y_0 = y_1$) als

$$b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2 \text{ oder } \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Das Gesetz ihrer Bildung aus der Hyperbelgleichung ist evident.

Die Normale der Hyperbel hat die Gleichung (§ 91)

$$a^2 y_1 x + b^2 x_1 y - c^2 x_1 y_1 = 0.$$

B.: Ort des Schnittpunktes rechtwinkliger Tangenten der spitzwinkligen Hyperbel.

§ 112*. Es folgt wie in § 90, dass die Tangente den Scheitelkreis $x^2 + y^2 = a^2$ der Hyperbel in Punkten schneidet, deren auf die Tangente errichteten Normalen nach den Brennpunkten gehen. Die Hyperbel kann daher wieder als Hüllcurve mittelst eines rechten Winkels erzeugt werden, nur dass der Drehpunkt F ausserhalb des Scheitelkreises liegen muss. Die Tangenten aus F an den Kreis berühren ihn auf der zugehörigen Leitlinie, denn diese ist die Polare des Brennpunktes in Bezug auf den Scheitelkreis. Die Berührungsradien liegen in den Asymptoten, denn diese sind die Tangenten vom kleinsten Neigungswinkel (§ 110).

Dass die Asymptoten Tangenten aus dem Mittelpunkt oder berührende Durchmesser sind, folgt daraus, dass für $k = 0$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \frac{\mp a b}{\sqrt{b^2 - m^2 a^2}}, \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} = \frac{\mp m a b}{\sqrt{b^2 - m^2 a^2}}$$

die Endpunkte des Durchmessers von der Richtungszahl m angeben (§ 107), und diese für $m^2 = b^2 : a^2$ unendlich grosse Coordinaten erhalten. Allgemein findet man das von einem äusseren Punkte P ausgehende Tangentenpaar mittelst des Scheitelkreises wie in § 90.

Setzen wir dagegen in der allgemeinen Formel des § 110 $m^2 = b^2 : a^2$, so liefert sie für x_1, x_2 den Nenner Null, aber auch für den Zähler von x_1 Null. Daher schneidet eine Parallele zu einer Asymptote die Hyperbel ausser im Unendlichen nur in einem endlichen Punkt, dessen Coordinaten man leicht direct als

$$x_2 = \mp \frac{a}{2 k b} (b^2 + k^2), \quad y_2 = \frac{1}{2 k} (k^2 - b^2)$$

ermittelt.

§ 113. Sind dann wieder T und N die Axenschnittpunkte der Tangente und der Normalen, so findet sich nach § 92 $FT:F'T = FP:F'P = FN:F'N$. Also ist die Tangente die innere, die Normale die äussere Halbirende des von den Brennradien des Hyperbelpunktes gebildeten Winkels. Diese Eigenschaft kann wiederum zur Construction der Hyperbeltangente dienen.

Haben eine Ellipse und eine Hyperbel daher dieselben Brennpunkte oder sind sie confocal, so sind ihre Tangenten in jedem Schnittpunkt die Halbirungslinien des Brennradienwinkels, stehen also zu einander normal. Man sagt, confocale Ellipsen und Hyperbeln schneiden sich rechtwinklig. Ihre Gleichungen sind

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{a'^2 - c^2} = 1,$$

wo c fest, $a < c < a'$ aber beliebig gewählt sind, oder b und b' gemäss der Relation $b^2 + b'^2 = a^2 - a'^2$.

§ 114*. Für den Schnittpunkt zweier Normalen gelten dieselben Überlegungen wie in § 93, 94, wenn das Vorzeichen von b^2 geändert wird. Für die Grenzlage desselben. den Krümmungsmittelpunkt gelten dieselben Formeln, ebenso für den Krümmungsradius

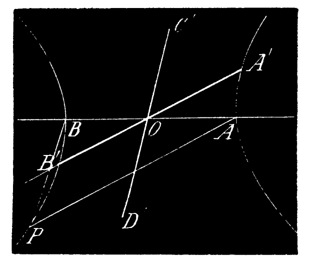
$$x_n = \frac{c^2}{a^4} x_1^3, \quad y_n = -\frac{c^2}{b^4} y_1^3, \quad a^2 b^2 \varrho^2 = (\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)^3.$$

Auch bei der Hyperbel ist also der Krümmungsradius am kleinsten an den Scheiteln für $x_1 = \pm a$, nämlich $\varrho = b^2 : a = p$ gleich dem Halbparameter. Von den Scheiteln weg wächst der Krümmungsradius unbegrenzt. Die Krümmung der Hyperbel nimmt also von den Scheiteln an fortwährend ab, die Curve nähert sich dem geradlinigen Verlaufe.

§ 115. Zwei Durchmesser, zwischen deren Richtungszahlen die Relation

$$m m' = \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a}$$

besteht, heissen conjugirte Durchmesser; jeder halbirt die zum conjugirten parallelen Sehnen. Sie können wie bei der Ellipse parallel zu Supplementarsehnen gezogen (§ 96) und dadurch zu einem ganz willkürlich vorgeschriebenen Conjugationswinkel ω construirt werden. Conjugirte Durchmesser der gegebenen Hyperbel sind zugleich auch solche der conjugirten Hyperbel.



Da das Product $m m'$ positiv ist, so kann $m = m' = \pm b : a$ sein. Die Asymptoten sind also Durchmesser, deren jeder sich selbst conjugirt ist. Ist nun $m < b : a$ so ist $m' > b : a$; conjugirte Durchmesser liegen also je in denselben Quadranten, aber zu verschiedenen Seiten der Asymptoten. Von zwei conjugirten Durchmessern schneidet daher stets einer die Hyperbel, der andere die conjugirte Hyperbel. Die Tangenten beider Hyperbeln in den Endpunkten conjugirter Durchmesser bilden ein Parallelogramm. Wieder bilden die Axen das einzige Paar zu einander normaler conjugirter Durchmesser.

Bei der rechtwinkligen Hyperbel ist $m m' = 1$. Daher liegen conjugirte Durchmesser in Bezug auf die Asymptoten symmetrisch. Ihre Längen in den beiden conjugirten rechtwinkligen Hyperbeln sind gleich, die in ihnen berührenden Parallelogramme also Rhomben. Diese Gleichheit der Paare nähert sich der Gleichheit aller beim Kreise, und nach ihr heisst die rechtwinklige auch gleichseitige Hyperbel.

§ 116. Ist $A(x' \mid y')$ ein Endpunkt eines Durchmessers AB, und sind C, D die Schnittpunkte des conjugirten Durchmessers mit der conjugirten Hyperbel, so sind deren Coordinaten (§ 97)

$$x'' = \pm \frac{a}{b} y', \; y'' = \pm \frac{b}{a} x'.$$

Bedeuten nun $a' = OA$, $b' = OC$ conjugirte Halbmesser, so ist

$$a'^2 = x'^2 + y'^2, \; b'^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2,$$

$$\text{folglich } a'^2 - b'^2 = (b^2 x'^2 - a^2 y'^2)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = a^2 - b^2.$$

Somit ist die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser constant, nämlich gleich der Differenz der Axenquadrate. Hieraus folgt wieder die Gleichseitigkeit der Hyperbel $a = b$.

Ferner ist der Inhalt des Parallelogramms von den Seiten a', b'

$$a' b' \sin \omega = x' y'' - x'' y' = \frac{b}{a} x'^2 - \frac{a}{b} y'^2 = a b.$$

Somit hat ein aus Tangenten conjugirter Richtungen an conjugirte Hyperbeln gebildetes Parallelogramm constanten Inhalt, nämlich gleich dem Inhalt des Rechtecks der Scheiteltangenten.

§ 117*. Die Gleichung $b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2$ definirt, wenn der Punkt $x_1 \mid y_1$ nicht auf der Hyperbel liegt, eine Gerade, welche die Polare jenes Pols in Bezug auf die Hyperbel heisst. Sie ist von der zum Durchmesser des Pols conjugirten Richtung und schneidet denselben in einem Punkte $x_0 \mid y_0$, so dass die Abstände des Pols und des letzteren das Product $(x_1^2 + y_1^2) : \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)$ ergeben, welches positiv oder negativ ist, je nachdem $y_1^2 : x_1^2 \lesseqgtr b^2 : a^2$ ist. Falls der Durchmesser die Hyperbel schneidet, sind die Endpunkte durch Pol und Polare harmonisch getrennt.

Falls aber der Durchmesser die conjugirte Hyperbel trifft, so trennen seine Endpunkte die Polare harmonisch von dem Punkte $-x_1 \mid -y_1$, der zum Pol $x_1 \mid y_1$ symmetrisch in Bezug auf das Centrum liegt. Man kann auch die Polare des Pols in Bezug auf die conjugirte Hyperbel bestimmen und zu ihr die symmetrische Gerade in Bezug auf den Mittelpunkt ziehen. Die Polaren $b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = \pm a^2 b^2$ desselben Pols in Bezug auf zwei conjugirte Hyperbeln sind parallel und haben entgegengesetzt gleiche Centralabstände.

Die Polare eines äusseren Punktes ist die Berührungssehne des von ihm ausgehenden Tangentenpaares. Der Mittelpunkt hat die Polare im Unendlichen. Die Polare eines unendlich fernen Punktes ist wiederum der conjugirte Durchmesser. Die Polare eines Hyperbelpunktes ist die

in ihm berührende Tangente. Die Polare eines Brennpunktes ist die zugehörige Leitlinie (§ 99).

B.: Berührungspunkt und Leitgeradenschnittpunkt einer Tangente bilden mit dem Brennpunkt ein rechtwinkliges Dreieck.

§ 118*. Wie in § 100* ändert die Gleichung einer Hyperbel ihre allgemeine Form nicht, wenn man sie zu conjugirten Durchmessern als schiefwinkligen Coordinatenaxen transformirt. Nimmt man einen Hauptdurchmesser von der Länge $2\,a'$ als X-Axe, den conjugirten mit der durch die conjugirte Hyperbel abgeschnittenen Länge $2\,b'$ als Y-Axe, so lautet die Hyperbelgleichung:

$$b'^2 X^2 - a'^2 Y^2 = a'^2 b'^2 \text{ oder } \frac{X^2}{a'^2} - \frac{Y^2}{b'^2} = 1.$$

Analog bleiben die Gleichungen der Durchmesser und Polaren gültig.

§ 119. Eine wichtige der Hyperbel eigentümliche Gleichungsform bietet sich durch die Wahl der Asymptoten zu Coordinatenaxen. Ist φ der halbe Asymptotenwinkel und denken wir die Axen um den negativen Winkel $-\varphi$ gedreht, so lauten die Transformationsformeln rechtwinkliger Coordinaten

$$c\,x = a\,x'' + b\,y'',\quad c\,y = -\,b\,x'' + a\,y''$$

und die transformirte Gleichung wird

$$(b^2 - a^2)\,y''^2 + 2\,a\,b\,x''\,y'' = a^2\,b^2.$$

Den Übergang zu schiefen Coordinaten x', y' (statt X, Y) mit dem Coordinatenwinkel $2\,\varphi$, wo $c^2 \sin 2\,\varphi = 2\,a\,b$, $c^2 \cos 2\,\varphi = a^2 - b^2$ ist, gibt dieselbe Neigungstransformation wie in § 100*. Schreibt man das vorige $y''\,(x'' \sin 2\,\varphi - y'' \cos 2\,\varphi) = a^2\,b^2\,c^2$, so wird das Resultat

$$y' \sin 2\,\varphi \,.\, x' \sin 2\,\varphi = 4\,a^2\,b^2\,x'\,y' = a^2\,b^2\,c^2$$

oder einfach

$$x'\,y' = \frac{c^2}{4}.$$

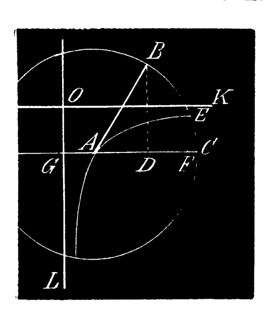
Mit der Änderung der Constanten erhält man alle Hyperbeln zu gegebenen Asymptoten. Für $c = 0$ ergeben sich demnach die Asymptoten selbst als Grenzfall der Hyperbel. Wären die Coordinaten rechtwinklig, so stellte diese Gleichung eine gleichseitige Hyperbel, im ersten und dritten Quadranten gelegen, dar.

Im allgemeinen enthält diese Asymptotengleichung der Hyperbel folgende Eigenschaft. Die durch den Hyperbelpunkt $x' \mid y'$ gezogenen Parallelen zu den Asymptoten schliessen mit diesen ein Parallelogramm ein von dem constanten Flächeninhalt $x'\,y' \sin 2\,\varphi = \frac{1}{4}\,c^2 \sin 2\,\varphi$. Diese Parallelogramme sind also für sämmtliche Hyperbelpunkte flächengleich. Die Hyperbel ist der Ort der freien Ecke eines Parallelogramms von vorgeschriebener Fläche, von dem zwei Seiten in gegebenen Geraden, den Asymptoten, liegen.

B.: Einen Winkel $BAC = \alpha$ in drei gleiche Teile zu teilen, d. h. auf einem Kreise $(AB = r)$ um A einen Punkt E so finden, dass Bogen $CE = \frac{1}{3}$ Bogen CB wird.



Nimmt man A zum Nullpunkt, AC zur x'-Axe rechtwinkliger Coordinaten und nennt die Coordinaten von B und E $a \mid b$ und $x' \mid y'$, so ist $a = r \cos \alpha$, $b = r \sin \alpha$, $x' = r \cos \frac{1}{3} \alpha$, $y' = r \sin \frac{1}{3} \alpha$. Dann folgt aus $2 \sin \frac{1}{3} \alpha \cos \frac{1}{3} \alpha = \sin \alpha \cos \frac{1}{3} \alpha - \cos \alpha \sin \frac{1}{3} \alpha$ die Gleichung $b x' - a y' = 2 x' y'$. Verschiebt man nun die Axen der x und y so, dass der neue Nullpunkt O die gestrichenen Coordinaten $-\frac{1}{2} a \mid \frac{1}{2} b$ hat, so lautet die transformirte Gleichung $xy = -\frac{1}{4} ab$. Daher ist E der Schnittpunkt des Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel, die in A den Schenkel AB berührt und OK, OL zu Asymptoten besitzt. Die Construction dieser Hyperbel löst also die Aufgabe.



§ 120. Den früheren Gleichungen der Tangente und Polare sei noch eine directe Ableitung der für die Curvengleichung $4 x' y' = c^2$ gültigen gegenübergestellt. Die Sehne der Punkte $x'_1 \mid y'_1$, $x'_2 \mid y'_2$ hat infolge $4 x'_1 y'_1 = 4 x'_2 y'_2 = c^2$ die Richtungszahl $(y'_1 - y'_2) : (x'_1 - x'_2) = -c^2 : 4 x'_1 x'_2 = -y'_1 : x'_2 = -y'_2 : x'_1$. Daher hat die in $x'_1 \mid y'_1$ berührende Tangente die Gleichung

$$y' - y'_1 = -\frac{y'_1}{x'_1}(x' - x'_1) \text{ oder } y'_1 x' + x'_1 y' = \frac{c^2}{2}.$$

Nun sind die Abschnitte der Tangente in den Asymptoten $OR = c^2 : 2 y'_1 = 2 x'_1$, $OS = c^2 : 2 x'_1 = 2 y'_1$. Also sind die Asymptotenabschnitte einer Tangente doppelt so gross als die Abschnitte der durch den Berührungspunkt gezogenen Asymptotenparallelen. Hiernach kann die Tangente in einem gegebenen Punkte leicht construirt werden. *Daher wird die von den Asymptoten in der Tangente abgeschnittene Strecke im Berührungspunkte halbirt.* Endlich ist das von einer beweglichen Tangente und den Asymptoten gebildete Dreieck von constanter Fläche, nämlich $\frac{1}{2} c^2 \sin 2 \varphi$.

§ 121*. Der vorletzte Satz lässt sich verallgemeinern. Die Hyperbelsehne CD $(x'_1 \mid y'_1, x'_2 \mid y'_2)$ hat nämlich die Gleichung $x'_1 (y' - y'_1) = -y'_2 (x' - x'_1)$, also die Asymptotenabschnitte $On = x'_1 (y'_1 + y'_2) : y'_2 = x'_1 + x'_2$ und $Om = y'_1 + y'_2$. Die Asymptotenabschnitte einer Secante sind also doppelt so gross als die Coordinaten der Sehnenmitte. Die von den Asymptoten in einer Geraden abgeschnittene Strecke wird durch den ihrer Richtung conjugirten Durchmesser halbirt. *Daher sind die Strecken einer Geraden je zwischen der Hyperbel und einer Asymptote gleich.* Mittelst dieses Satzes können beliebig viele Punkte einer Hyperbel angegeben werden, wenn dieselbe durch ihre Asymptoten und *einen* Curvenpunkt bestimmt wird.

Endlich folgert man, dass *conjugirte Durchmesser harmonisch sind in Bezug auf die Asymptoten.* Denn die halbirten Sehnen der Curven sind gleichzeitig halbirte Sehnen des Asymptotenpaares. In der Tat werden die Sehnen von der Richtungszahl $m = -y'_2 : x'_1$ halbirt durch den Durchmesser der Richtung $m' = (y'_1 + y'_2) : (x'_1 + x'_2) = c^2 : 4 x'_1 x'_2 = -m$.

VII. Übersicht der Kegelschnitte.

§ 122. Die Kegelschnitte sollen in der analytischen Raumgeometrie (B. V.) als ebene Querschnitte von Umdrehungskegeln nachgewiesen und so auf ihren eigentlichen stereometrischen Ursprung zurückgeführt werden. Aus demselben leitet sich das gemeinsame planimetrische Erzeugungsgesetz ab, welches in der Proportionalität der Abstände des beweglichen Punktes von einem Brennpunkte F und einer Leitgeraden l besteht (§ 80). Der unmittelbare Coordinatenausdruck desselben liefert die Focalgleichung (§ 81) und die Scheitelgleichung (§ 82)

$$x^2 + y^2 = (\varepsilon x + p)^2 \text{ und } y^2 = 2px - \delta x^2,$$

wo $2p$ die im Brennpunkte halbirte Sehne als Parameter bedeutet und δ weiterhin zur Abkürzung für $1 - \varepsilon^2$ gesetzt sei.

Die Focalgleichung kann auch in Polarcoordinaten r, ϑ mit dem Nullpunkt F umgesetzt werden:

$$\pm r = \varepsilon r \cos\vartheta + p \text{ oder } r = \frac{\pm p}{1 \mp \varepsilon \cos\vartheta},$$

wo die oberen oder die unteren Vorzeichen zusammengehören. Gerade diese Form zeigt deutlich den Hauptunterschied in den Gestalten der drei Curvengattungen, wenn man ϑ von 0 bis 180° wachsen und von 360° bis 180° abnehmen lässt und die gleichzeitige Änderung von r verfolgt. Denn ist $\varepsilon < 1$, so kann r nicht ∞ werden, sondern nimmt von $\vartheta = 0$ oder 360° bis $\vartheta = 180°$ fortwährend ab: die Ellipse ist geschlossen. Ist dagegen $\varepsilon = 1$, so gibt $\vartheta = 0$ oder 360° einen einzigen Wert $r = \infty$ und von da an nimmt r bis $\vartheta = 180°$ ab: die Parabel ist offen mit einem unendlich fernen Punkt (§ 68). Ist endlich $\varepsilon > 1$, so gibt es zwei Winkel $\vartheta = \varphi$ oder $180 + \varphi$ und $\vartheta = 180 - \varphi$ oder $360 - \varphi$, für welche $r = \infty$ wird ($\varepsilon \cos\varphi = \pm 1$): die Hyperbel geht offen in zwei Richtungen ins Unendliche. Sie besteht aus zwei getrennten Ästen, weil das obere Vorzeichen nur für $\vartheta > \varphi$ (absolut) positive Werte r liefert, welche zu den Punkten des F umschliessenden Astes gehören, während sich für $\vartheta < \varphi$ negative Werte r finden. Diese gehören aber zu Punkten des getrennten Astes, denn sie ergeben sich auch positiv für $\vartheta > \varphi$, unter Annahme der unteren Vorzeichen (§ 107).

§ 123. Insbesondere sei auf die verschiedene Ausprägung der Symmetrieverhältnisse hingewiesen. Alle Kegelschnitte $y^2 = 2px - \delta x^2$ haben die Normale aus F auf l zur Symmetrieaxe. Dieselbe enthält zwei Scheitel $x = 0$ und $x = 2p : \delta$, deren absolute Entfernung Hauptaxe $2a$ heisst; aber dieselbe ist ∞ für die Parabel $\delta = 1$, und $a = 0$ für das Linienpaar $p = 0$. Die Normalen der Axe schneiden die Curve in symmetrischen Punkten, wenn ihre Fusspunkte einem der durch die Scheitel begrenzten Teile der Axe angehören.

In einer Parallelen zur Hauptaxe liegen zwei reelle Punkte, so lange $p^2 - \delta y^2 \geqq 0$ ist. Da in $y^2 = 2px - \delta x^2$ der Coefficient von x constant ist, so liegen die Mitten dieser Sehnen auf der zur Axe normalen Nebenaxe $x = p : \delta$ (∞ Parabel, 0 Linienpaar). Der absolute Wert von $p^2 : \delta$ wird als Quadrat der halben Nebenaxe b bezeichnet (negativ für Hyperbel, ∞ für Parabel, 0 für Linienpaar). Der Axen-

schnittpunkt ist Mittelpunkt, halbirt nämlich alle durch ihn gehenden Sehnen (Durchmesser), deren Gleichungen sind

$$y = m\left(x - \frac{p}{\delta}\right).$$

Die Ordinaten $\pm p$ gehören zu zwei Abscissen x'_0, x''_0, die durch $p^2 = 2\,p\,x_0 - \delta\,x_0^2$ bestimmt sind und die beiden Brennpunkte angeben. Man findet $(1+\varepsilon)\,x'_0 = p$, $(1-\varepsilon)\,x''_0 = p$ (Kreis $x'_0 = x''_0$, Parabel $x''_0 = \infty$, Linienpaar $x'_0 = x''_0 = 0$) und also für das Quadrat eines Brennradius

$$(x-x_0)^2+y^2=\varepsilon^2\,x^2+2\,(p-x_0)\,x+x_0^2=(\varepsilon\,x+x'_0)^2 \text{ oder } = (\varepsilon x - x''_0)^2.$$

Betrachten wir daher als Brennradien die Strecken $\varepsilon\,x + x'_0$ und $\varepsilon\,x - x''_0$ nach Längen und Vorzeichen (für die Ellipse entgegengesetzt), so ist ihr Unterschied constant $x'_0 + x''_0 = 2\,p : \delta$ gleich der Hauptaxe $2\,a$. Dagegen ist $x''_0 - x'_0 = 2\,\varepsilon\,p : \delta = 2\,\varepsilon\,a = 2\,c$ die Focaldistanz.

§ 124. Mittelst der gemeinsamen Focal- oder Scheitelgleichung können die gemeinsamen Eigenschaften der Kegelschnitte entwickelt werden. Um sie jedoch den einzelnen Fällen anzupassen, sind den Constanten ε, p, a, c die in folgender Tabelle enthaltenen Bedingungen aufzuerlegen:

Kegelschnitt	ε	p	a	c	Gleichung
Ellipse	$0<\varepsilon<1$	p	$p:(1-\varepsilon^2)$	$<a$	$y^2=2px+(1-\varepsilon^2)x^2.$
Kreis	$\varepsilon=0$	r	r	0	$y^2=2\,r\,x-x^2.$
Nullellipse	$0\leqq\varepsilon<1$	0	0	0	$y^2=(1-\varepsilon^2)\,x^2.$
Parabel	$\varepsilon=1$	p	0	∞	$y^2=2\,p\,x.$
Doppelgerade	$\varepsilon=0$	0	unbest.		$y^2=0.$
Hyperbel	$\varepsilon>1$	p	$p:(\varepsilon^2-1)$	$>a$	$y^2=2px+(\varepsilon^2-1)x^2.$
Rechtwinkl. Hyp.	$\varepsilon=\sqrt{2}$	p	p	$p\sqrt{2}$	$y^2=2\,p\,x+x^2.$
Geradenpaar	$\varepsilon=0$	0	0	0	$y^2=(\varepsilon^2-1)\,x^2.$

Es sind dies sämtliche Kegelschnitte, welche einen endlichen Scheitel besitzen (vgl. § 135).

Sie haben alle die Eigenschaft, mit einer Geraden, die nicht ganz in ihnen enthalten ist, nicht mehr als zwei Punkte gemein haben zu können (§ 127). Dabei sind jedoch Richtungen als unendlich ferne Punkte zu behandeln und ist die Vereinigung zweier in ein doppelt zählendes Element zuzulassen.

§ 125. Je nach der Grösse der Excentricität ε im Vergleich mit der Einheit unterscheidet man die drei Gattungen der Kegelschnitte. Diese Gattungen sind jedoch nicht von gleichartigem Umfang, sondern Ellipsen und Hyperbeln bilden die beiden Hauptgattungen, Parabeln nur die Übergangsgattung. In der Tat ist, während p in allen Gattungen willkürliche Werte annimmt, bei Ellipsen und Hyperbeln ε nur durch eine Ungleichung beschränkt, bei Parabeln aber durch eine Gleichung vorgeschrieben. Unter den Kegelschnitten von demselben Parameter $2\,p$ und verschiedenen Axen $2\,a$ kann daher die Parabel als eine Ellipse oder als eine Hyperbel mit

unendlich grosser Hauptaxe angesehen werden. Jede Gattung besitzt Degenerationsformen für den Nullwert des Parameters. Dagegen sind Kreis und rechtwinklige Hyperbel nur specielle Formen der Hauptgattungen von vorgeschriebener Excentricität.

Die Gattungen unterscheiden sich auch durch ihr Verhalten gegen die unendlich ferne Gerade. Soll ein Punkt $x = \infty$, $y = m\,x$ dem Kegelschnitt $y^2 = 2\,p\,x - \delta\,x^2$ angehören, so muss die durch x^2 dividirte Gleichung für $x = \infty$ befriedigt sein, also $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{2\,p}{x}\right) - \delta$ oder endlich $m^2 = -\delta = \varepsilon^2 - 1$. Somit wird, je nachdem $\delta > 0$, $\delta = 0$, $\delta < 0$, der Kegelschnitt von der unendlich fernen Geraden nicht geschnitten (Ellipse), von ihr berührt in der Axenrichtung $m = 0$ (Parabel), oder von ihr in zwei Asymptotenrichtungen $m = \pm\sqrt{(-\delta)}$ geschnitten (Hyperbel).

§ 126. Die Sehne zwischen zwei Punkten $x_1 \,|\, y_1$, $x_2 \,|\, y_2$ eines Kegelschnittes ist

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{p - \delta\,x_0}{y_0} = m,$$

wenn $2\,x_0 = x_1 + x_2$, $2\,y_0 = y_1 + y_2$ ist. Denn diese Umformung der Richtungszahl ergibt sich aus $\delta\,x_1{}^2 + y_1{}^2 - 2\,p\,x_1 = \delta\,x_2{}^2 + y_2{}^2 - 2\,p\,x_2$ oder $y_2{}^2 - y_1{}^2 = (x_2 - x_1)\,[2\,p - \delta\,(x_1 + x_2)]$.

Daher liegen die Mitten $x_0 \,|\, y_0$ aller parallelen Sehnen von der Richtungszahl m auf dem Durchmesser $m\,y = p - \delta\,x$ von der Richtungszahl $m' = -\delta : m$, den man jener Sehnenrichtung conjugirt nennt. Überhaupt heissen zwei Richtungen conjugirt, wenn ihre m, m' der Bedingung genügen

$$m\,m' = -\delta = \varepsilon^2 - 1;$$

für die Parabel ist also entweder m oder $m' = 0$, d. h. eine stets die Axenrichtung. Durchmesser, deren conjugirte Sehnen zu ihnen normal sind, heissen Axen (bei der Parabel nur eine im Endlichen, beim Kreise unzählige).

§ 127. Die Verbindungsgerade von zwei beliebigen Punkten $x_1 \,|\, y_1$, $x_2 \,|\, y_2$ der Ebene, d. h. eine beliebige Gerade hat mit dem Kegelschnitt im allgemeinen zwei Schnittpunkte. Denn die Teilverhältnisse, welche dieselben in der gegebenen Strecke bestimmen, werden dadurch ermittelt, dass man in der Scheitelgleichung x durch $(x_1 + \lambda\,x_2) : (1 + \lambda)$ und y durch $(y_1 + \lambda\,y_2) : (1 + \lambda)$ ersetzt. Dies gibt aber eine Gleichung zweiten Grades mit der Unbekannten λ

$$(\delta\,x_1{}^2 + y_1{}^2 - 2\,p\,x_1) + 2\,\lambda\,(\delta\,x_1\,x_2 + y_1\,y_2 - p\,x_1 - p\,x_2) + \\ \lambda^2\,(\delta\,x_2{}^2 + y_2{}^2 - 2\,p\,x_2) = 0.$$

Damit $\lambda = 0$ eine Wurzel sei, muss die erste Klammer den Wert Null haben, d. h. $x_1 \,|\, y_1$ auf der Curve liegen. Umgekehrt muss $\lambda = \infty$ eine Wurzel sein, wenn $x_2 \,|\, y_2$ auf der Curve liegt, d. h. die letzte Klammer Null ist. Man sieht dies sofort aus der Gleichung, nachdem man sie durch λ^2 dividirt hat, da sie alsdann eine Wurzel $1 : \lambda = 0$ besitzt. Ein unendlich ferner Schnittpunkt hat $\lambda = -1$; dann lässt sich aber die Gleichung zusammenziehen in $\delta\,(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0$ oder $\delta + m^2 = 0$, wonach die Asymptotenrichtung wie in § 125 folgt.

§ 128. Zwei Punkte $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ sind durch den Kegelschnitt harmonisch getrennt, wenn die vorige Bestimmungsgleichung für λ entgegengesetzt gleiche Wurzeln ergibt. Dies geschieht aber nur, wenn die mittlere Klammer den Wert Null hat, die Coordinaten der Punkte also der Bedingung genügen

$$y_1 y_2 = p(x_1 + x_2) - \delta x_1 x_2.$$

Somit liegen alle Punkte, die von einem gegebenen Pole $x_1 | y_1$ auf Strahlen seines Büschels durch den Kegelschnitt harmonisch getrennt sind, auf der Geraden $y_1 y = p(x_1 + x) - \delta x_1 x$, der Polaren von $x_1 | y_1$. Umgekehrt ist aber jede Gerade $y = mx + k$ Polare eines gewissen Punktes $x_1 | y_1$, dessen Coordinaten sich durch den Vergleich dieser Gleichungen ergeben, nämlich aus

$$\frac{1}{x_1} = \frac{m}{k} + \frac{\delta}{p}, \quad \frac{1}{y_1} = \frac{k}{p} \frac{1}{x_1}.$$

Die Polare eines jeden Punktes der Geraden geht durch den Pol derselben, und umgekehrt, infolge der Symmetrie obiger Bedingung.

Jedoch verlieren diese Sätze zum Teil ihre Bedeutung, wenn der Kegelschnitt degenerirt, $p = 0$ ist. Denn dann geht die Polare $y_1 y = -\delta x_1 x$ eines jeden Punktes durch den Nullpunkt. Daher mögen weiterhin nur die eigentlichen Curven unter den Kegelschnitten berücksichtigt werden.

§ 129. Die Polare eines Punktes $x_1 | y_1$ des Kegelschnittes hat mit der Curve nur diesen Punkt gemein. Denn unter der Voraussetzung, dass die beiden ersten Klammerausdrücke in der Gleichung des § 127 den Wert Null haben, hat die Gleichung nur die Doppelwurzel $\lambda = 0$. Daher ist diese Polare eine Secante mit vereinigten Schnittpunkten und heisst Tangente, ihr Pol der Berührungspunkt.

Nach dieser Definition wird ihre Gleichung direct erhalten, wenn man in der Secantengleichung des § 126 die beiden Schnittpunkte in den einen $x_1 | y_1$ zusammenrücken lässt, etwa durch Drehung um ihn. Denn, setzen wir $x_2 = x_1 = x_0$, $y_2 = y_1 = y_0$, so entsteht die Gleichung

$$y_1 (y - y_1) = (p - \delta x_1)(x - x_1) \text{ oder } y_1 y = p(x_1 + x) - \delta x_1 x,$$

falls man zur ersten Form $y_1^2 = 2 p x_1 - \delta x_1^2$ addirt.

§ 130. Die Tangenten zweier Curvenpunkte $x' | y'$ und $x'' | y''$ schneiden sich in dem Pol $x_1 | y_1$ ihrer Sehne, denn er ist der Schnittpunkt der Polaren dieser Punkte. Umgekehrt sind die Schnittpunkte der Curve mit der Polaren eines Punktes $x_1 | y_1$ Berührungspunkte von Tangenten aus demselben. Daher gehen von einem äusseren Punkte zwei Tangenten an den Kegelschnitt und die Polare ist ihre Berührungssehne. Die Gleichung dieses Tangentenpaares kann man erhalten, indem man die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Gleichung des § 127 gleiche Wurzeln besitzt.

Überhaupt ist die Polare bestimmt, sobald man auf zwei durch den Pol gehenden Secanten die von ihm durch die Curve harmonisch getrennten Punkte angibt. Es ist nur ein specieller Fall hiervon, dass die Richtung der Polaren (Tangente) dem durch den Pol gehenden Durchmesser conjugirt ist. Denn die Polare einer Richtung ist der conjugirte Durchmesser, da die Mitten der parallelen Sehnen die harmonischen Teilpunkte sind.

§ 131. Die Abstände der Brennpunkte x'_0 und x''_0 (§ 125) von der Tangente in $x_1 \mid y_1$ (§ 129) sind proportional zu $(\delta x_0 - p) x_1 - p x_0 = p(\mp \varepsilon x_1 - x_0)$, d. h. zu den Brennradien des Berührungspunktes. Daher sind die Sinus der Winkel zwischen der Tangente und den Brennstrahlen gleich. Die Tangente und die Normale in einem Curvenpunkte halbiren die Brennradienwinkel. Ihre Axenschnittpunkte sind daher durch die Brennpunkte harmonisch getrennt (halbirt bei der Parabel).

Ferner findet man den Nenner, durch welchen die Tangentengleichung die Normalform erhält (§ 30), als $\sqrt{y_1^2 + (\delta x_1 - p)^2} = \sqrt{\varepsilon^2 y_1^2 + p^2}$. Daher ist der Abstand der Tangente vom Mittelpunkt und die Projection der halben Focaldistanz auf die Tangente

$$-p^2 : \sqrt{\varepsilon^2 y_1^2 + p^2} \text{ und } \varepsilon p y_1 : \delta \sqrt{\varepsilon^2 y_1^2 + p^2},$$

so dass die Summe ihrer Quadrate einfach $p^2 : \delta^2 = a^2$ beträgt. Somit befinden sich die Fusspunkte der von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Normalen im Abstand a vom Mittelpunkt oder auf dem Scheitelberührungskreis. Also werden die Curven auch eingehüllt vom Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel einen Kreis durchläuft, während der andere Schenkel durch einen festen Punkt geht.

§ 132*. Der zum Brennpunkt F in Bezug auf eine Tangente symmetrische Punkt liegt also auf dem verlängerten Brennradius des Berührungspunktes im Abstand $2a$ von F'. Somit ist der Kegelschnitt der Ort des Centrums eines Kreises, der durch den Brennpunkt F geht und den um F' mit der Hauptaxe als Radius beschriebenen Kreis berührt. Beschreibt man ferner um F einen Kreis r und um F' einen Kreis $2a + r$ oder $2a - r$, so werden auch diese von Kreisen berührt, deren Centra auf der Curve liegen. Die Gattung der Curve hängt dann von der Lage der festen Kreise gegen einander und der Art der Berührung durch den beweglichen Kreis ab.

Wie so die Definition mittelst der Brennpunkte, so führt auch die Definition mittelst Brennpunkt und Leitgerade zu einer Erweiterung, nämlich folgender: D e r O r t e i n e s P u n k t e s, d e s s e n T a n g e n t e n l ä n g e n a n e i n e n f e s t e n K r e i s u n d d e s s e n A b s t a n d v o n e i n e r f e s t e n G e r a d e n i n e i n e m c o n s t a n t e n V e r h ä l t n i s ε s t e h e n, i s t e i n K e g e l s c h n i t t v o n d e r E x c e n t r i c i t ä t ε. Ist nämlich $m \mid 0$ der feste Mittelpunkt und $x + n = 0$ die feste Gerade, so ist der Coordinatenausdruck des Satzes nach § 80

$$(x - m)^2 + y^2 - r^2 = \varepsilon^2 (x + n)^2$$

oder

$$\delta x^2 + y^2 = 2(m + \varepsilon^2 n) x - m^2 + \varepsilon^2 n^2 + r^2.$$

Damit diese Gleichung mit der Focalgleichung übereinstimme, der Kegelschnitt also den Brennpunkt F im Nullpunkt habe, muss das Quadrat der Coefficienten von $2x$ das ε^2-fache des constanten Gliedes sein, also

$$\varepsilon^2 r^2 = (1 + \varepsilon^2) m^2 + 2 \varepsilon^2 m n.$$

Die Vergleichung liefert ferner

$$\varepsilon p = m + \varepsilon^2 n, \text{ so dass } n = \frac{p}{\varepsilon} - \varepsilon m$$

zu einem beliebigen Mittelpunkt $m \mid 0$ im Kegelschnitte $\delta x^2 + y^2 = 2 \varepsilon p x + p^2$ die zugehörige Hülfsgerade und die vorige Formel den Kreisradius r liefert.

Schneidet nun die feste Gerade $x + n = 0$ den Kegelschnitt in zwei Punkten, so muss ihn der zugehörige feste Kreis in denselben berühren. Ein solcher Kreis heisst ein doppeltberührender Kreis, sein Radius ist die Länge der Normalen der Berührungspunkte. Für jeden Punkt des Kegelschnittes ist also die Tangente an einen beliebigen, denselben doppeltberührenden Kreis das ε-fache seines Abstands von der Berührungssehne.

Wenn sich die beiden Berührungspunkte in einem Scheitel vereinigen, die Berührungssehne in die Scheiteltangente übergeht, so wird der doppeltberührende Kreis insbesondere zum Krümmungskreise dieses Scheitels, da sich in seinem Centrum zwei unendlich nahe Curvennormalen schneiden (§ 74*). Ist der Abstand n der Scheitel aus $(1 \pm \varepsilon)\, n = \pm p$ zu ermitteln, also m aus $(1 \pm \varepsilon)\, m = \varepsilon p$, so findet sich r^2 aus der angegebenen Formel gleich p^2. Somit ist der Ort eines Punktes, dessen Tangenten an einen Kreis vom Radius p zu seinem Abstand von einer Tangente des Kreises das Verhältnis ε haben, der Kegelschnitt von der Excentricität ε, welcher den Kreis zum Scheitelkrümmungskreis und die Tangente zur Scheiteltangente hat. Diese Definition liest man jedoch schon aus der Scheitelgleichung selbst ab. Denn schreibt man dieselbe $\varepsilon^2 x^2 = x^2 + y^2 - 2\,p\,x$, so gibt die rechte Seite die Potenz des laufenden Punktes in Bezug auf den durch den Scheitel gehenden Kreis vom Radius p an.

B.: Der Ort des Schnittpunktes der Tangenten eines festen Kreises r, die auf einer festen Tangente desselben eine constante Länge $2\,l$ zwischen sich fassen, ist der Kegelschnitt von dem Parameter p und der Excentricität $\varepsilon = l : r$. Denn nimmt man den zur festen Tangente normalen Durchmesser als x-Axe, den Gegenpunkt des Berührungspunktes als O, so hat eine Tangente, welche auf der festen die Ordinate h abschneidet, die Richtungszahl $ctg\,2\,\vartheta$, wenn $tg\,\vartheta = r : h$ gesetzt wird. Ersetzt man h durch $h \pm l$, so ist nur h zu eliminiren aus den Gleichungen

$$[(h \pm l)^2 - r^2]\, x - 2\, r\, (h \pm l)\, y + 2\, r^3 = 0.$$

§ 133. Die Gleichung eines Kegelschnitts kann auch bei allgemeiner Lage desselben zu den Coordinatenaxen unmittelbar aufgestellt werden, wenn er durch einen Brennpunkt $x_0 \mid y_0$, die zugehörige Leitgerade $x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - n = 0$ und die Excentricität ε gegeben ist. Sie lautet

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2\, (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - n)^2$$

und ergibt durch Auflösung der Klammern Glieder mit x^2, y^2, $x\,y$, x, y und ein constantes Glied. Beachten wir, dass die Ausrechnung bei den Coefficienten von $x\,y$, x, y lauter Doppelproducte ergibt, so können wir die Gleichung ordnen in

$$A\,x^2 + B\,y^2 + 2\,C\,x\,y + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0.$$

Hierin sind nun aber die sechs Coefficienten

$A = \varrho\,(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta)$, $B = \varrho\,(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \vartheta)$, $C = -\varrho\,\varepsilon^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$,

$D = -\varrho\,(x_0 - \varepsilon^2 n \cos \vartheta)$, $E = -\varrho\,(y_0 - \varepsilon^2 n \sin \vartheta)$, $F = \varrho\,(x_0^2 + y_0^2 - \varepsilon^2 n^2)$,

wo ϱ eine ganz willkürliche reelle Zahl bedeuten kann. Dieselbe rührt davon her, dass wir die erste Gleichung noch mit irgend einem constanten Factor multipliciren dürfen, ohne ihre geometrische Deutung zu ändern. Die allgemeine Gleichung ist vom zweiten Grade und hängt nur von fünf Constanten ε; ϑ, n; x_0, y_0 ab.

§ 134. Auch die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen $x|y$ enthält nur drei Glieder zweiten Grades (Ax^2, By^2, $2Cxy$), zwei Glieder ersten Grades ($2Dx$, $2Ey$) und ein constantes Glied (F). Soll dieselbe mittelst rechtwinkliger Coordinaten geometrisch gedeutet werden, so haben wir nach § 3 A, B, C als reine Zahlen, D, E als Masszahlen von Längen und F als Masszahl einer Fläche aufzufassen, wie in der Tat in § 133 ersichtlich ist. Aber mit einem dieser Coefficienten kann dividirt werden, also hängt die geometrische Deutung nur von den Verhältnissen von fünf Coefficienten zum sechsten ab.

Der geometrische Ort, der durch eine Gleichung zweiten Grades definirt ist, heisst Linie zweiter Ordnung. Denn dieselbe hat die Eigenschaft, dass eine bewegliche Gerade diesen Ort nicht in mehr als zwei getrennten Punkten schneiden kann. Denn die Elimination von x oder von y mittelst einer Gleichung ersten Grades gibt eine Bestimmungsgleichung zweiten Grades für y oder für x. Also sind die Kegelschnitte Linien zweiter Ordnung.

Bedeuten $x|y$ schiefe Coordinaten, so können statt ihrer Ausdrücke ersten Grades in rechtwinkligen Coordinaten eingesetzt werden (§ 19). Da der Grad der Gleichung sich dadurch offenbar nicht erhöhen kann, so stimmt ihre Bedeutung vollkommen überein mit derjenigen der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in rechtwinkligen Coordinaten. Daher sind letztere weiterhin vorausgesetzt.

§ 135. Aber sind alle Linien zweiter Ordnung Kegelschnitte? Stellt jede allgemeine Gleichung zweiten Grades einen Kegelschnitt dar? Dies ist der Fall dann und nur dann, wenn fünf Constanten ε; ϑ, n; x_0, y_0 mittelst A, B, C, D, E, F nach obigen Relationen gefunden werden können. Dabei ist nun zu beachten, dass ε und ϑ nur von den drei ersten Coefficienten A, B, C abhängen. Man findet einerseits $A+B=\varrho\,(2-\varepsilon^2)=\varrho\,(1-\delta)$ und $AB-C^2=\varrho^2(1-\varepsilon^2)$ $=\varrho^2\delta$, anderseits $B-A=\varrho\,\varepsilon^2\cos 2\,\vartheta$, $2\,C=-\varrho\,\varepsilon^2\sin 2\,\vartheta$, also

$$\frac{AB-C^2}{(A+B)^2}=\frac{\delta}{(1-\delta)^2} \text{ und } \frac{2\,C}{A-B}=tg\,2\,\vartheta.$$

Wenn daher eine Gleichung zweiten Grades einen Kegelschnitt definirt, so ist sofort anzugeben, welcher der drei Gattungen derselbe angehört. Der Ort gehört zu den Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln, je nachdem

$$AB-C^2 \gtreqless 0 \text{ oder } AB \gtreqless C^2$$

ist, denn diese Bedingung ist identisch mit $\delta>0$, $\delta=0$, $\delta<0$ oder $\varepsilon<1$, $\varepsilon=1$, $\varepsilon>1$. Dasselbe ergibt sich aus dem Verhalten der Gleichung für unendlich grosse Werte der Veränderlichen. Dividiren wir nämlich die Gleichung durch x^2, setzen dann $x=\infty$, $y=mx$, so behalten nur die Glieder zweiten Grades einen von Null verschiedenen Wert. Zur Bestimmung der Richtungen m ihrer Vectorgeraden bleibt

$$A+Bm^2+2\,Cm=0 \text{ oder } Ax^2+By^2+2\,Cxy=0.$$

Die Gattung hängt also nur von den Gliedern zweiten Grades ab.

§ 136*. Um die allgemeine Gleichung zu deuten, suchen wir sie dadurch auf einfachere, womöglich bekannte Formen zu bringen, dass wir sie durch Drehung und Verschiebung des Axensystems transformiren. Um zunächst das Glied mit xy wegzuschaffen, führen wir eine Drehung aus (§ 15), deren Grösse ϑ wir uns passend zu wählen vorbehalten. Die transformirte Gleichung behält dieselbe Form

$$A' x'^2 + B' y'^2 + 2\, C' x' y' + 2\, D' x' + 2\, E' y' + F = 0,$$

erhält aber Coefficienten, die von den alten und von ϑ abhängen

$$A' = A \cos^2 \vartheta + B \sin^2 \vartheta + 2\, C \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$B' = A \sin^2 \vartheta + B \cos^2 \vartheta - 2\, C \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$C' = -(A - B) \sin \vartheta \cos \vartheta + C (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) = -\tfrac{1}{2} (A - B) \sin 2\vartheta + C \cos 2\vartheta,$$

$$D' = D \cos \vartheta + E \sin \vartheta,\ E' = -D \sin \vartheta + E \cos \vartheta,\ F = F.$$

Nur die Constante F bleibt ungeändert und zwar kann sie, wenn sie nicht Null ist, negativ vorausgesetzt werden.

Nun wollen wir aber ϑ so wählen, dass $C' = 0$ wird. Dazu muss der Drehungswinkel ϑ derselben Bedingung genügen, wie in § 135:

$$tg\, 2\, \vartheta = \frac{2\, C}{A - B}.$$

Da die Tangente jeden Wert annehmen kann, gibt es stets eine Lösung 2ϑ, die aber nur bis auf Vielfache von 180° bestimmt ist. Daher ist der Winkel ϑ der Drehung nur bis auf willkürliche Vielfache von Rechten angegeben: ϑ, $90 + \vartheta$, $180 + \vartheta$, $270 + \vartheta$. Offenbar gibt jedoch die Einsetzung von $90 + \vartheta$ in A' und B', D' und E' dasselbe wie bezw. die von ϑ in B' und A', E' und D', während F unverändert bleibt.

Man kann daher durch die Wahl von ϑ oder $90 + \vartheta$ als Drehungswinkel im allgemeinen bewirken, dass (bei nicht-positivem F) $A' < B'$ wird. Dies sei weiterhin vorausgesetzt. Unmöglich ist es nur dann, wenn $A' = B'$ ist. Aber die Gleichung

$$A' (x'^2 + y'^2) + 2\, D' x' + 2\, E' y' + F = 0$$

ist nach § 55 die allgemeine Gleichung eines Kreises, ihre Deutung schon erledigt. Man bemerkt, dass aus $A' = B'$, $C' = 0$ auch $A = B$, $C = 0$ folgt, also $tg\, 2\, \vartheta$ unbestimmt, d. h. jede Drehungstransformation überflüssig wird (vgl. § 44).

§ 137*. Ferner kann man in der fünfgliedrigen Gleichung des § 136 im allgemeinen durch eine Axenverschiebung $x' = x'' + x'_0$, $y' = y'' + y'_0$ die beiden Glieder ersten Grades beseitigen. Durch die Transformation entsteht

$$A' x''^2 + B' y''^2 + 2\, (A' x'_0 + D')\, x'' + 2\, (B' y'_0 + E')\, y'' + F' = 0,$$

$$\text{wo } F' = A' x'^2_0 + B' y'^2_0 + 2\, D' x'_0 + 2\, E' y'_0 + F.$$

Wenn nun weder $A' = 0$ noch $B' = 0$ ist, — diese Fälle seien vorläufig ausgeschlossen —, so lassen sich für $x'_0 \mid y'_0$ endliche Werte angeben

$$x'_0 = -\frac{D'}{A'},\ y'_0 = -\frac{E'}{B'}, \text{ so dass } F' = D' x'_0 + E' y'_0 + F = F - \frac{D'^2 + E'^2}{A' B'}$$

ist und die Gleichung auf die dreigliedrige Form

$$A' x''^2 + B' y''^2 + F' = 0$$

reducirt wird, in welcher laut Voraussetzung $A' < B'$ ist.

In dieser Gleichung sind die Vorzeichen der Glieder wesentlich. Es ist von vornherein unmöglich, dass alle Glieder dasselbe Vorzeichen besitzen, denn in diesem Falle kann die linke Seite für kein reelles Wertepaar $x'' \mid y''$ zu Null werden. Also hat eine Gleichung mit $A' < B' < 0$, $F' < 0$ keine geometrische Bedeutung.

Daher sind nur folgende Fälle zu unterscheiden. Entweder ist $B' > A' > 0$, $F' \leqq 0$ oder $B' > 0 > A'$, $F' \gtreqless 0$. Im ersten Falle kann, falls $F' < 0$ ist, gesetzt werden

$$\frac{A'}{F'} = \frac{1}{a^2}, \ \frac{B'}{F'} = \frac{1}{b^2} \ \text{und} \ \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - 1 = 0$$

stellt eine Ellipse von den Halbaxen a und b dar ($a > b$). Für $A' = B'$ ergibt sich wiederum der Kreis. Ist dagegen $F' = 0$, so ist

$$A' x''^2 + B' y''^2 = 0$$

eine nur durch $x'' = 0$, $y' = 0$ reell zu befriedigende Gleichung, stellt also nur den Nullpunkt als unendlich kleine Ellipse oder Nullellipse dar.

Im zweiten Falle aber kann, so lange $F' > 0$ ist, gesetzt werden

$$\frac{A'}{F'} = -\frac{1}{a^2}, \ \frac{B'}{F'} = \frac{1}{b^2} \ \text{und} \ -\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + 1 = 0$$

stellt eine Hyperbel mit den Halbaxen a und b dar ($a^2 > 0 > b^2$). (Ist aber $F' < 0$, so wird die y-Axe Hauptaxe der Hyperbel.) Für $A' = -B'$ entsteht insbesondere die gleichseitige Hyperbel ($a^2 = -b^2$). Für $F' = 0$ dagegen ist

$$A x''^2 + B y''^2 = 0 \ \text{oder} \ y'' = \pm \sqrt{-\frac{A}{B}} \cdot x''$$

die Gleichung eines Geradenpaares durch den Nullpunkt.

§ 138*. Die Fälle $A' = 0$ oder $B' = 0$ erfordern eine andere Verschiebungstransformation behufs weiterer Vereinfachung. Offenbar genügt es, die Annahme $A' = 0$, $B' > 0$ (F beliebig) zu untersuchen, da die gegenteilige Annahme durch eine Vertauschung der Axen daraus hergeleitet werden kann.

In $B' y'^2 + 2 D' x' + 2 E' y' + F = 0$ können durch Verschiebung die beiden letzten Glieder beseitigt werden. Denn der Coefficient von y'' wird $B' y'_0 + E'$, und das constante Glied $F' = E' y'_0 + 2 D' x'_0 + F$. Also setzt man $y'_0 = -E' : B'$ und ferner kann x'_0, wenn nicht $D' = 0$ ist, so bestimmt werden, dass $F' = 0$ ist, somit

$$x'_0 = -\frac{E' y'_0 + F}{2 D'} = \frac{E'^2 - B' F}{2 D'} \ \text{und} \ B' y''^2 + 2 D' x'' = 0$$

die reducirte Gleichung wird. Setzen wir aber dann

$$-\frac{D'}{B'} = \pm p \ \ (D' \lessgtr 0),$$

so ist dies die Scheitelgleichung $y''^2 = \pm 2 p x''$ einer auf der positiven oder negativen Seite der Ordinatenaxe gelegenen Parabel.

Ist dagegen $D' = 0$, so stellt

$$B' y'^2 + 2 E' y' + F = 0 \ \text{oder} \ B' y' = -E' \pm \sqrt{E'^2 - B' F}$$

ohne weitere Transformation entweder ein Parallelenpaar oder eine

doppelt zählende Parallele zur Abscissenaxe dar, je nachdem $E'^2 > B'F$ oder $E'^2 = B'F$ ist. Dagegen findet die Gleichung für $E'^2 < B'F$ keine geometrische Deutung.

§ 139*. Demnach sind durch die folgenden Bedingungen die nebenstehenden Örter definirt:

Coefficienten-Bedingungen.		Curve zweiter Ordnung.
$B' > A' > 0,$	$F' < 0,$	Ellipse,
$B' = A' > 0,$	$F' < 0,$	Kreis,
$B' > A' \gtrless 0,$	$F' = 0,$	Nullellipse;
$A' = 0,\ B' > 0,$	$D' \gtrless 0,$	Parabel,
$A' = 0,\ FB' < E'^2,$	$D' = 0,$	Parallelenpaar,
$A' = 0,\ FB' = E'^2,$	$D' = 0,$	Doppelgerade;
$B' > 0 > A',$	$F' > 0,$	Hyperbel,
$B' = -A' < 0,$	$F' > 0,$	Gleichseitige Hyperbel,
$B' > 0 > A',$	$F' = 0,$	Linienpaar.

Bedingungen, in welchen A' und B', C' und D' vertauscht sind, entsprechen Örtern gleicher Art, für welche nur die Axen ihre Bedeutung gewechselt haben.

Gleichungen, welche keiner dieser Bedingungen genügen, haben keine reelle geometrische Deutung. Nun stimmen diese Linien mit den in § 124 unter dem Namen der Kegelschnitte zusammengefassten überein, nur dass als Specialfall der Parabel neu das Parallelenpaar hinzutritt, welches in der Focalgleichung und Scheitelgleichung nicht darstellbar ist. In der Tat ist dieser Ort, genau genommen, nur als Cylinderschnitt zu bezeichnen. Fassen wir aber den Cylinder als speciellen Kegel mit unendlich fernem Scheitel, so kann nun der Satz aufgestellt werden: Jede Gleichung zweiten Grades, welche überhaupt geometrisch gedeutet werden kann, stellt einen Kegelschnitt im allgemeinsten Sinn dar.

§ 140*. In den transformirten Coefficienten unterscheiden sich die Gattungen, je nachdem $A'B' > 0$, $A'B' = 0$ oder $A'B' < 0$ ist. Man findet nämlich durch Addition und Subtraction der ersten Formeln des § 136

$$A' + B' = A + B,$$
$$B' - A' = (B - A)\cos 2\vartheta - 2C\sin 2\vartheta$$

und durch Berechnung der trigonometrischen Functionen mittelst $tg\,2\vartheta$

$$B' - A' = \sqrt{(B-A)^2 + 4C^2}.$$

Damit lassen sich praktisch berechnen

$$A'B' = AB - C^2 \text{ (vgl. § 135) und}$$
$$A' \text{ oder } B' = \tfrac{1}{2}\left\{A + B \mp \sqrt{(B-A)^2 + 4C^2}\right\}.$$

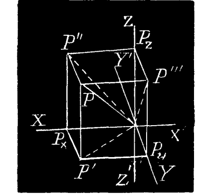
Endlich folgt $\quad \delta = \dfrac{A'}{B'},\ \varepsilon = +\sqrt{\dfrac{B'-A'}{B'}},$

wenn wir nur die ersten Glieder der durch Drehung transformirten Gleichung $A'x^2 + B'y^2 + F' = 0$ mit denen der Gleichung $\delta x^2 + y^2 = 2px$ vergleichen.

B. Analytische Geometrie des Raumes.

I. Bestimmung von Punkten und Richtungen.

§ 1. Um die Lage eines Punktes P im Raume zu bestimmen, denke man sich durch einen festen Punkt O drei zu einander paarweise normale Axen $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$ gezogen, den Schnittpunkt O als gemeinsamen Nullpunkt genommen und eine feste Masseinheit gewählt. Legt man nun durch den Punkt P die Normalebenen zu jeder der Axen und nennt die Fusspunkte P_x, P_y, P_z die Axenprojectionen des Punktes, so hat man nur diese durch die allgemein mit den Zeichen x, y, z belegten Masszahlen der Strecken OP_x, OP_y, OP_z anzugeben (**A.** § 1).



Denn P ergibt sich alsdann als die dem Nullpunkt gegenüberliegende „freie" Ecke in einem Quader (rechtwinkligen Parallelflach) von den drei Kanten $OP_x = x$, $OP_y = y$, $OP_z = z$, gebildet durch die Axenebenen und die Normalebenen in den Abständen x, y, z vom Nullpunkt.

Jeder Punkt P ist also durch drei Coordinaten x, y, z festgelegt, welche einzeln die Strecken vom Nullpunkt bis zu seinen Axenprojectionen angeben. Von diesen Coordinaten heisst wieder x Abscisse, y Ordinate und ferner z Höhe des Punktes P. Statt der ausführlichen Angaben $x = a$, $y = b$, $z = c$ schreiben wir wieder $a \mid b \mid c$ unter Festhaltung dieser Reihenfolge. Also hat P_x die Coordinaten $a \mid 0 \mid 0$, $P_y : 0 \mid b \mid 0$, $P_z : 0 \mid 0 \mid c$, $O : 0 \mid 0 \mid 0$.

§ 2. Man nennt die Ebenen je zweier Axen Coordinatenebenen und zwar xy-Ebene oder erste, xz-Ebene oder zweite und yz-Ebene oder dritte Coordinatenebene. Je zwei Coordinaten x, y oder x, z oder y, z bestimmen zusammen Punkte P', P'', P''' der Coordinatenebenen, welche die Fusspunkte der von P auf diese gefällten Normalen sind und Projectionen des Punktes P schlechtweg heissen. So hat die erste Projection P' die Coordinaten $a \mid b \mid 0$, die zweite $P'' : a \mid 0 \mid c$, die dritte $P''' : 0 \mid b \mid c$. Zudem folgt aus der Kantengleichheit des Quaders, dass

die Abstände des Punktes P von den Coordinatenebenen sind $P'P = z$, $P''P = y$, $P'''P = x$. Man kann daher die Coordinaten auch als die mit Vorzeichen versehenen Normalabstände des Punktes P von drei zu einander normalen Coordinatenebenen definiren.

Die Projectionen eines Punktes P auf je zwei Coordinatenebenen sind nicht unter einander unabhängig. Denn zu einer gegebenen Projection des Punktes ist nur noch die Angabe seines normalen Abstandes von demselben erforderlich. Daher wird der Punkt P aus seinen Coordinaten am besten durch Abtragung des vom Nullpunkt zu ihm hinführenden Weges erhalten. Man trägt etwa $OP_x = x$ in der x-Axe, normal zu ihr $P_x P' = y$ in der xy-Ebene, normal zu dieser $P'P = z$ ab.

§ 3. Zwei beliebige normale Axenkreuze können zur Deckung gebracht werden. Jedoch fallen dabei nicht notwendig beliebige, gleichbezeichnete Halbaxen auf einander, sondern, sind ihrer zwei in Deckung, so können die dritten Halbaxen noch von gleichem oder entgegengesetztem Sinne sein. Um daher nur congruente Axensysteme einzuführen, wird festgesetzt, dass für einen Beobachter auf der positiven z-Axe die Drehung von der positiven x-Axe in die positive y-Axe als eine positive Drehung erscheine. Dann erscheint von selbst die Drehung von der $+y(z)$-Axe in die $+z(x)$-Axe von der $+x(y)$-Axe aus ebenfalls positiv. Will man in den Figuren in den ersten Octanten hineinsehen, so folgen sich daher die positiven Halbaxen der x, y, z in der Zeichnung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers.

Die drei Coordinatenebenen zerlegen den Raum in acht Octanten, deren Kanten je drei Halbaxen sind. Nach der Benennung dieser Halbaxen als positiv oder negativ richten sich die Vorzeichen der gleichnamigen Coordinaten aller Punkte der Octanten. Die Octanten unterscheiden sich daher durch die blossen Vorzeichencombinationen der Coordinaten ihrer Punkte. Sind a, b, c positive Zahlen, so liegen $+a\,|+b\,|\pm c$, $-a\,|+b\,|\pm c$, $-a\,|-b\,|\pm c$, $+a\,|-b\,|\pm c$ im I. oder V., II. oder VI., III. oder VII., IV. oder VIII. Octanten. Zwei Punkte, deren Coordinaten sich in einem bezw. in zwei Vorzeichen unterscheiden (z. B. $\pm a\,|\,b\,|\,c$ bezw. $\pm a\,|\pm b\,|\,c$), liegen symmetrisch in Bezug auf die zur gleichnamigen Axe normale Ebene (yz-Ebene), bezw. die ungleichnamige Axe (z-Axe). Zwei Punkte mit entgegengesetzt gleichen Coordinaten ($\pm a|\pm b|\pm c$) sind symmetrisch in Bezug auf den Nullpunkt.

Jeder Punkt einer Coordinatenebene hat eine, jeder Punkt einer Axe zwei Coordinaten vom Werte Null. Man sagt daher umgekehrt: Die Gleichung der xy-Ebene ist $z = 0$, die der yz-Ebene $x = 0$, die der zx-Ebene $y = 0$; die Gleichungen der x-Axe sind $y = 0$, $z = 0$, die der y-Axe $z = 0$, $x = 0$, die der z-Axe $x = 0$, $y = 0$; endlich bestimmen die drei Gleichungen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ den Nullpunkt.

§ 4. Ebenso ist $x = x_0$ die Gleichung einer Parallelebene zur yz-Ebene, $y = y_0$ die einer Parallelebene zur zx-Ebene, $z = x_0$ die einer Parallelebene zur xy-Ebene. Ferner sind $y = y_0$, $z = z_0$ die Gleichungen einer Parallelen zur x-Axe, $z = z_0$, $x = x_0$ die einer Parallelen zur y-Axe, $x = x_0$, $y = y_0$ die einer Parallelen zur z-Axe, je der Schnittgeraden zweier der vorigen Ebenen. Endlich sind $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ die Gleichungen des Schnittpunktes der drei Ebenen oder Geraden.

Nehmen wir diese Ebenen etwa als Coordinatenebenen eines zum gegebenen parallelen Systems, den Punkt $x_0 | y_0 | z_0$ also als neuen Nullpunkt O', so können wir für jeden Punkt $x | y | z$ die neuen Coordinaten $x' | y' | z'$ angeben. Die Formeln der Verschiebungstransformation lauten (vgl. **A.** § 13)

$$x = x' + x_0,\ y = y' + y_0,\ z = z' + z_0 \text{ oder}$$
$$x' = x - x_0,\ y' = y - y_0,\ z' = z - z_0.$$

Die Ebene von der Gleichung $z' = 0$ und die Gerade von den Gleichungen $x' = 0, y' = 0$ in den transformirten Coordinaten haben daher die Gleichung $z = z_0$ und die Gleichungen $x = x_0,\ y = y_0$ in den ursprünglichen. Dieses Einsetzen der Ausdrücke gegebener Coordinaten durch solche eines andern Systems nennt man wiederum das Transformiren einer gegebenen Gleichung.

§ 5. Die den Nullpunkt mit dem Punkte $x | y | z$ verbindende Strecke OP zählt man wesentlich positiv und nennt sie den Vector dieses Punktes. Die Länge des Vectors r ergibt sich als die Diagonale des Coordinatenquaders:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ebenso findet man den Ausdruck der Entfernung d zweier Punkte P_1, P_2 aus deren Coordinaten $x_1 | y_1 | z_1$, $x_2 | y_2 | z_2$, indem man durch jeden Parallelebenen zu den Coordinatenebenen legt und die Diagonale ihres Quaders ermittelt:

$$d = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Dasselbe ergibt sich durch Verschiebungstransformation, zu einem der beiden Punkte als neuem Nullpunkt, aus dem Ausdruck des Vectors r. Nur ist die Entfernung eine Strecke von noch beliebig verfügbarem Sinn (**A.** § 11).

§ 6. Die räumliche Lage des Punktes P kann daher durch den Vector r, als den directen Weg vom Nullpunkt aus, festgelegt werden, wenn man noch seine Richtung angibt. Die drei Winkel, welche der Vector r mit der x-, y- und z-Axe bildet, nennt man seine Axenwinkel α, β, γ. Dieselben sind aus den rechtwinkligen Dreiecken OPP_x, OPP_y, OPP_z zu berechnen mittelst

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\ \cos\beta = \frac{y}{r},\ \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Ebenso sind die Axenwinkel einer beliebigen Strecke $P_1 P_2$ gleich ihren Winkeln mit den durch P_1 gezogenen Axenparallelen, also bestimmt durch (§ 5)

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d},\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d},\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Als Axenwinkel einer beliebigen Geraden kann man diejenigen der parallelen Vectorgeraden betrachten.

Die besonders häufig gebrauchten Cosinus der Axenwinkel heissen die Richtungscosinus der Geraden. Dieselben bestimmen nur die absoluten Werte der Winkel, aber in der Raumgeometrie genügt es überhaupt, die drei Axenwinkel von den positiven Halbaxen aus absolut zu messen. Ebenso könnte man in der ebenen Geometrie einen Vector

dadurch festlegen, dass man seine absoluten Richtungsunterschiede α, β gegen beide positiven Halbaxen angäbe. In der Tat geschieht dies, wie im Gegensatz zu **A.** § 8 wohl zu beachten ist, wenn man Formeln der Raumgeometrie für eine Coordinatenebene specialisirt. Allein offenbar genügte hier schon die Angabe, ob β spitz oder stumpf, $\cos\beta \gtrless 0$ sei, wenn $\cos\alpha$, also α absolut genommen, gegeben ist.

§ 7. Auch im räumlichen System sind die Axenwinkel nicht untereinander unabhängig. Durch Quadriren und Addiren der Cosinusformeln entspringt die Relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2).$$

Die Summe der Cosinusquadrate der Winkel einer Geraden mit drei paarweise normalen Axen ist die Einheit. Durch die beiden ersten Winkel α, β ist der dritte γ (absolut) bis auf zwei Annahmen mitbestimmt, da

$$\sin\gamma = \sin(180 - \gamma) = +\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta},$$

also zwischen γ oder $180-\gamma$ erst das Vorzeichen von $\cos\gamma$ entscheidet.

Aber auch zwei Axenwinkel sind nicht ganz willkürlich, sondern müssen der Ungleichheit genügen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta \leqq 1 \quad \text{oder} \quad \cos^2\alpha \leqq \sin^2\beta.$$

Demnach darf die Summe der absoluten Werte zweier Axenwinkel nicht kleiner als ein Rechter sein.

Dieselben Bedingungen erhellen stereometrisch. Alle Vectoren von gegebenem α bezw. β erfüllen einen Umdrehungskegel um die x- bezw. y-Axe. Je nachdem die Summe der Kegelwinkel grösser, gleich oder kleiner wie 90° ist, schneiden sich die Kegel in zwei zur xy-Ebene symmetrischen Halbstrahlen, berühren sich in dieser Ebene oder schneiden sich nicht. Von den Schnittgeraden gehört aber nur je eine einem Kegel um die positive oder negative z-Axe an.

§ 8. Aus dem Vector r und dessen Axenwinkeln α, β, γ folgen die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P als

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma,$$

d. h. als die Projectionen des Vectors auf die Axen.

Somit sind diese Cosinuswerte selbst die rechtwinkligen Coordinaten $OQ_x = \cos\alpha$, $OQ_y = \cos\beta$, $OQ_z = \cos\gamma$ des Punktes Q vom Vector Eins, also des Schnittpunktes des durch α, β, γ gegebenen Halbstrahls mit der Einheitskugel, d. h. der um den Nullpunkt als Centrum beschriebenen Kugel vom Radius Eins. Die Axenwinkel geben also einen Punkt der Einheitskugel, welcher als Hülfspunkt bei Überlegungen bezüglich der Richtungen dient. Passend bezeichnet man deshalb die vier Grössen r, α, β, γ, welche infolge der Identität zwischen den Winkeln nur für drei willkürliche Grössen stehen, als die Kugelcoordinaten des Punktes P.

Endlich kann jener Hülfspunkt auch angegeben werden, wie ein Ort der Erdkugel, durch (geographische) Länge φ und Breite α oder Polhöhe ψ. Unter φ ist der Winkel der ersten Projection des Vectors gegen die x-Axe zu verstehen. Alsdann bestimmen r, φ, ψ als Polarcoordinaten einen Raumpunkt P.

§ 9. Mittelst einer Verschiebungstransformation werden allgemein die Sätze begründet (vgl. **A.** § 12): Die Projection einer Strecke auf eine Axe wird erhalten durch Multiplication der Strecke mit dem Cosinus ihres Axenwinkels. Das Verhältnis zweier Strecken in Geraden von gleichem Axenwinkel ist gleich dem Verhältnis ihrer Axenprojectionen. Ein Teilverhältnis wird also durch Projection nicht geändert.

Daher sind die Coordinaten eines Punktes, der in einer durch einen gegebenen Punkt $x_0 | y_0 | z_0$ unter den Axenwinkeln α, β, γ gezogenen Geraden liegt, darstellbar mittelst der bekannten Grössen und einer Unbestimmten d, welche die Strecke vom gegebenen bis zum beweglichen Punkt misst, nämlich nach

$$x = x_0 + d \cos \alpha,\ y = y_0 + d \cos \beta,\ z = z_0 + d \cos \gamma.$$

Der Halbstrahl von den supplementären Axenwinkeln wird durchlaufen, wenn man entweder d negative Werte gibt oder die Vorzeichen der Richtungscosinus ändert.

Ferner sind die Coordinaten eines Punktes in einer durch zwei gegebene Punkte $x_1 | y_1 | z_1$, $x_2 | y_2 | z_2$ bestimmten Geraden darstellbar mittelst der bekannten Grössen und einer Unbestimmten λ, welche das Teilverhältnis derselben in der gegebenen Strecke bedeutet. Denn es ist

$$\lambda = \frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z},$$

also $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Somit gelten hier die Formeln der ebenen Geometrie, ebenso auch in der Lehre von den harmonischen Gruppen (**A.** § 5, 36).

§ 10. Die Neigungswinkel eines Vectors gegen die Coordinatenebenen sind die Complemente seiner Axenwinkel $\sphericalangle P'' O P = \mathfrak{a} = 90 - \alpha$, $\sphericalangle P''' O P = \mathfrak{b} = 90 - \beta$, $\sphericalangle P' O P = \mathfrak{c} = 90 - \gamma$. Daher besteht zwischen ihnen die Relation $\sin^2 \mathfrak{a} + \sin^2 \mathfrak{b} + \sin^2 \mathfrak{c} = 1$ und die Summe zweier muss kleiner als ein Rechter sein (§ 7).

Laut stereometrischer Definition sind dann diese Winkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zugleich die Neigungswinkel der Axen gegen die durch den Nullpunkt gelegte Normalebene der Vectorlinie α, β, γ (Vectorebene). Dagegen sind α, β, γ selbst die Winkel zwischen dieser Vectorebene und den drei Coordinatenebenen. Daher werden die Flächenwinkel zweckmässig durch die Axenwinkel des normalen Vectors ersetzt.

§ 11. Die Hauptaufgabe der räumlichen Winkelmessung, auf welche jede andere zurückzuführen ist, besteht also darin, den Winkel δ zweier Vectoren zu ermitteln, wenn deren Axenwinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gegeben sind. Da die Schnittpunkte der Halbstrahlen mit der Einheitskugel die Coordinaten $\cos \alpha_1 | \cos \beta_1 | \cos \gamma_1$ und $\cos \alpha_2 | \cos \beta_2 | \cos \gamma_2$ haben, so gilt für die Entfernung d dieser Punkte:

$$d^2 = (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)^2 + (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)^2 + (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)^2 \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{2} d^2 = 1 - (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2).$$

Anderseits bilden diese Punkte mit dem Nullpunkt ein gleichschenkliges Dreieck von den Schenkeln 1 und dem eingeschlossenen Winkel δ. Nach dem Cosinussatze (Trigon.) ist also auch $d^2 = 2 - 2 \cos \delta$, folglich

$$\cos \delta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Auch findet man den Vectorwinkel zweier Punkte $x_1 \mid y_1 \mid z_1$ und $x_2 \mid y_2 \mid z_2$, deren Vectoren r_1 und r_2 sind, aus

$$r_1 r_2 \cos \delta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Besonders wichtig ist der Specialfall $\cos \delta = 0$. Zwei Vectoren oder beliebige Gerade sind zu einander normal, wenn ihre Axenwinkel der Orthogonalitätsbedingung genügen

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0.$$

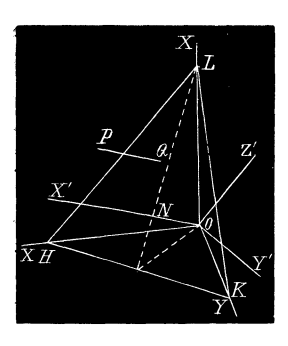
§ 12. Eine weitere Coordinatentransformation (§ 4) bezieht sich auf den Übergang von einem normalen Axenkreuz zu einem andern mit gleichem Nullpunkt. Auch dieser Übergang kann durch eine blosse Drehung bewirkt werden. Bezeichnen wir nun die Cosinus der Axenwinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ der $+x'$-Axe mit a_1, b_1, c_1, die der $+y'$-Axe mit a_2, b_2, c_2, die der $+z'$-Axe mit a_3, b_3, c_3, so bestehen zwischen diesen 9 Cosinus 6 Relationen, nämlich für je drei die Identität (§ 7), und für je 6 die Orthogonalitätsbedingung (§ 11), also:

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 = 0,\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2 = 0,\ a_3{}^2 + b_3{}^2 + c_3{}^2 = 0;$$

$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0,\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0,\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Hat dann ein Punkt $x \mid y \mid z$ die Richtungscosinus a, b, c und bezeichnet man seine neuen Coordinaten mit $x' \mid y' \mid z'$, seine Richtungscosinus im neuen System mit a', b', c', so können nach § 11 berechnet werden

$$a' = a_1 a + b_1 b + c_1 c, \quad b' = a_2 a + b_2 b + c_2 c, \quad c' = a_3 a + b_3 b + c_3 c.$$



Ersetzen wir nun $a = \cos \alpha$ durch $x : r$, $a' = \cos \alpha'$ durch $x' : r$ etc. (§ 8), so entstehen (nach Weglassung des gemeinsamen Nenners r) die Transformationsformeln

$$x' = x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1,$$
$$y' = x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2,$$
$$z' = x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3.$$

Auf dieselbe Art kann der umgekehrte Übergang ausgeführt werden. Dazu ist nur zu beachten, dass die Neigungswinkel der ursprünglichen Axen gegen die neuen sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ für die x-Axe, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ für die y-Axe, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ für die z-Axe. Somit lauten die Formeln

$$x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3,$$
$$y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3,$$
$$z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich durch Projection des im neuen System vom Nullpunkt zum Punkte $x \mid y \mid z$ führenden Coordinatenzugs der x', y', z' auf jede der ursprünglichen Axen, denn diese Projectionen, welche durch Multiplication mit dem Cosinus der Axenwinkel erhalten werden (§ 9), ergeben als Summe die Projection des Vectors.

§ 13. Diese Formeln enthalten eine unmittelbar nützliche Deutung, welche von der Transformation völlig losgelöst erscheint. Die Coordinate z' ist der Abstand QP des Punktes P von der $x'y'$-Ebene, d. h. von einer Ebene, deren Normale die Axenwinkel $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ besitzt (wofür

wir jetzt α, β, γ schreiben wollen). Der Abstand eines Punktes $x \mid y \mid z$ von einer gegebenen Vectorebene drückt sich also mittelst x, y, z und der Richtungscosinus α, β, γ der Normale der Ebene aus und zwar positiv nach der Seite des Halbstrahls α, β, γ.

Schneidet nun eine andere gegebene Ebene diesen positiven Normalstrahl in N im Abstande $ON = n$, so ist der normale Abstand des Punktes P von dieser Ebene offenbar $z' - n$, also gleich

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - n.$$

Denkt man sich somit eine Ebene festgelegt durch ihren normalen Abstand $ON = n$ vom Nullpunkt und durch dessen Axenwinkel, wobei die normale Richtung vom Nullpunkt zur Ebene als die positive anzusehen ist, so gibt obige Formel den normalen Abstand eines beliebigen Punktes $x \mid y \mid z$ von der Ebene und zwar mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem der Punkt und der Nullpunkt sich auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite der Ebene befinden (vgl. **A.** § 15).

§ 14*. Die Projectionen der Axen auf diese beliebige Ebene sind die Strahlen vom Normalenfusspunkt N nach den Axenschnittpunkten H, K, L der Ebene. Schliessen diese Projectionen die Winkel $KNL = \alpha_0$, $LNH = \beta_0$, $HNK = \gamma_0$ ein ($\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 360^0$), so bestehen die Beziehungen $\cos \alpha_0 = - ctg \beta \, ctg \gamma$, $\cos \beta_0 = - ctg \gamma \, ctg \alpha$, $\cos \gamma_0 = - ctg \alpha \, ctg \beta$. Denn es ist $OH \cos \alpha = OK \cos \beta = OL \cos \gamma = n$, $NH \, ctg \alpha = NK \, ctg \beta = NL \, ctg \gamma = n$; damit wird aus dem Cosinussatze für ein Dreieck HNK

$$NH^2 + NK^2 - HK^2 = NH^2 - OH^2 + NK^2 - OK^2 = 2 NH \,.\, NK \,.\, \cos \gamma_0$$

abgeleitet $-2 n^2 = 2 n^2 \, tg \, \alpha \, tg \, \beta \cos \gamma_0$. Umgekehrt sind die Neigungen von zu einander normalen Axen gegen eine Ebene durch ihre Projectionen auf dieselbe schon völlig bestimmt ($tg^2 \alpha = - \cos \alpha_0 : \cos \beta_0 \cos \gamma_0$). Gleichzeitig geben $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ die Projectionen der auf den Axen abgetragenen Längeneinheit an.

In den Zeichnungen der analytischen Raumgeometrie können daher die positiven Halbaxen durch drei beliebige Halbstrahlen eines Büschels angegeben werden, aber die verjüngten Massstäbe zum Abtragen der Coordinaten auf ihnen sind nicht mehr willkürlich, falls die Bilder normale Projectionen bedeuten sollen. So gehören in den beigegebenen Figuren zu $\alpha_0 = 95^0 \, 11'$, $\beta_0 = 107^0 \, 49'$, $\gamma_0 = 157^0$ die Massstäbe $\sin \alpha = 5 : \sqrt{103}$, $\sin \beta = 9 : \sqrt{103}$, $\sin \gamma = 10 : \sqrt{103}$. Der Punkt mit den Coordinaten x, y, z wird veranschaulicht durch Abtragen der Abscisse $0{,}5 \, x$, der Ordinate $0{,}9 \, y$ und der Höhe z. So gibt die Figur § 1 den Punkt P von den Coordinaten $1 \mid 1 \mid 1$.

§ 15. Die Gleichungen der Raumgeometrie enthalten drei Veränderliche x, y, z oder weniger. Eine Gleichung, welche überhaupt geometrische Bedeutung hat, stellt im allgemeinen eine Fläche, d. h. ein zweifach ausgedehntes Gebilde dar. Für Gleichungen mit nur einer Unbekannten x ist evident, dass sie eine Gruppe von Normalebenen der x-Axe darstellen. Denn hat die Gleichung die reellen Wurzeln $a, b, c \ldots$, so kann sie in $k (x - a)(x - b)(x - c) \ldots = 0$ zerlegt werden. Ebenso sind Gleichungen mit nur zwei Veränderlichen z. B. x, y leicht zu deuten, als Gleichungen von zur xy-Ebene normalen Cylindern. Denn in der xy-Ebene stellt eine solche Gleichung

eine Linie dar, deren Punkte mit allen Punkten der durch sie zur z-Axe gezogenen Parallelen gleiche x und y haben.

Eine Gleichung zwischen x, y, z findet folgendermassen geometrische Deutung. Nimmt man für z beliebige reelle Werte c_1, $c_2 \ldots$, so gibt die Einsetzung eines jeden solchen Wertes eine Gleichung mit nur noch zwei Veränderlichen x, y. Eine solche stellt aber im allgemeinen eine in einer bestimmten Ebene $z = c_1, c_2 \ldots$ gelegene Linie dar. Da alle ihre Punkte nun Coordinaten haben, welche die gegebene Gleichung befriedigen, so gehören diese Curven dem Orte an. Lassen wir nun z sich allmälig und stetig ändern, so ändern sich auch die Curvengleichungen in $x \mid y$ nur allmälig in ihren Coefficienten. Die Linien gehen in benachbarte über und erfüllen so eine Fläche.

§ 16. Zwei gleichzeitig bestehende Gleichungen können noch unzählig viele gemeinsame Lösungen besitzen. Denn eine Ebene $z = c_1$ schneidet die beiden durch die Gleichungen ausgedrückten Flächen in zwei ebenen Curven, welche nur Gruppen von getrennten Schnittpunkten besitzen. In der nächst benachbarten Ebene $z = c_2$ sind die Schnittcurven im allgemeinen wenig abweichend, also auch ihre Schnittpunkte im allgemeinen den früheren benachbart. Daher stellen zwei Gleichungen zusammen eine Linie dar als Schnittlinie zweier Flächen; ist sie krumm und liegt nicht in einer Ebene, so heisst sie eine Raumcurve. So tritt im Raume die Gerade als Schnittlinie zweier Ebenen auf, z. B. $x = a$, $y = b$.

Endlich haben drei unabhängige Gleichungen zwischen drei Unbekannten eine Anzahl gemeinsamer Wurzeln. Daher schneiden sich je drei Flächen im allgemeinen in einer Gruppe von Schnittpunkten.

II. Die Ebene und die Gerade.

§ 17. Eine Ebene kann gegenüber dem Coordinatensystem allgemeine oder besondere Lage haben. Speciell gelegen sind Ebenen, welche zu einer Coordinatenaxe oder -ebene normal sind oder durch den Nullpunkt gehen. Eine Normalebene einer Axe wird stets durch eine der drei Formen $x = a$, $y = b$, $z = c$ dargestellt. Eine Normalebene einer Coordinatenebene wird stets durch eine Gleichung ersten Grades mit nur zwei Veränderlichen dargestellt, welche, in der Coordinatenebene derselben gedeutet, einfach die Gleichung ihrer Schnittgeraden ist (§ 16).

Jede Vectorebene kann als Coordinatenebene eines gedrehten Coordinatensystems betrachtet werden z. B. $z' = 0$ (§ 12). Sind nun die Axenwinkel der zu ihr normalen Vectorgeraden α, β, γ, so ist ihre Gleichung in x, y, z

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0.$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich direct, wenn wir die Ebene als den Ort des beweglichen Schenkels eines um seinen anderen festen Schenkel drehbaren rechten Winkels definiren. Denn sie ist auch die Bedingung dafür, dass der Vector des laufenden Punktes $x \mid y \mid z$ zu dem Vector α, β, γ des Punktes $r \cos \alpha \mid r \cos \beta \mid r \cos \gamma$ normal sei, nach § 11.

§ 18. Zu jeder gegebenen Ebene gibt es nun eine parallele Vectorebene. Wird die den Abstand n der Ebene vom Nullpunkt enthaltende positive Normale α, β, γ als positive z'-Axe genommen, so ist in dem neuen Coordinatensystem die Gleichung der Ebene $z' = n$ (§ 13), in dem alten somit (vgl. **A.** § 29)

$$x \cos \alpha + y \sin \beta + z \cos \gamma - n = 0.$$

Diese Gleichung einer Ebene, deren Normale aus dem Nullpunkt die Richtung α, β, γ und die Länge n oder den Fusspunkt $x_0 = n \cos \alpha$, $y_0 = n \cos \beta$, $z_0 = n \cos \gamma$ hat, heisst die Normalgleichung der Ebene. Jede Ebene kann so gegeben werden, alle speciellen Lagen inbegriffen.

Die grosse Verwendbarkeit dieser Gleichungsform erhellt ferner daraus, dass nach § 13 die Einsetzung der Coordinaten $x \,|\, y \,|\, z$ eines ganz beliebigen Raumpunktes in die linke Seite der Normalgleichung dieser einen Wert erteilt, welcher den Abstand des Punktes von der Ebene angibt. Daher drückt die Gleichung nur den selbstverständlichen Satz aus, dass die Punkte der Ebene und nur diese von derselben Abstände Null haben

§ 19. Somit kann jede Ebene durch eine Gleichung ersten Grades dargestellt werden. Umgekehrt definirt auch jede Gleichung ersten Grades eine bestimmbare Ebene. Denn die allgemeine Gleichung ersten Grades, welche vier Glieder hat und geschrieben sei

$$A x + B y + C z + D = 0,$$

kann auf die Normalform gebracht werden (vgl. **A.** § 32).

Die drei Coefficienten A, B, C können nämlich den Richtungscosinus einer Geraden proportional gesetzt werden: $A = \varrho \cos \alpha$, $B = \varrho \cos \beta$, $C = \varrho \cos \gamma$. Man hat nur ϱ so zu bestimmen, dass $\varrho^2 = A^2 + B^2 + C^2$. Setzen wir nun auch $D = -\varrho n$, so ist das Vorzeichen der Quadratwurzel ϱ nur so zu wählen, dass n positiv wird, also entgegengesetzt dem Vorzeichen des constanten Gliedes D.

Daher erhält die Gleichung ersten Grades, ohne Änderung ihrer Bedeutung, die Normalform, wenn man sie durch die mit richtigem Vorzeichen versehene Zahl $\varrho = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ dividirt oder also setzt

$$A : \varrho = \cos \alpha, \quad B : \varrho = \cos \beta, \quad C : \varrho = \cos \gamma, \quad -D : \varrho = n.$$

Es ist dies zugleich die Methode, die Neigungswinkel der Ebene gegen die Coordinatenebenen zu ermitteln.

Also ist auch der normale Abstand eines Punktes von der durch die allgemeine Gleichung gegebenen Ebene gleich

$$\frac{1}{\varrho} (A x + B y + C z + D),$$

wenn für x, y, z die Coordinaten des Punktes eingesetzt sind.

Immerhin kann die Gleichung einer Ebene scheinbar in einer Form höheren Grades auftreten. So ist die Ebene auch der Ort eines Punktes $x \,|\, y \,|\, z$, welcher von zwei festen Punkten $x' \,|\, y' \,|\, z'$ und $x'' \,|\, y'' \,|\, z''$ gleiche Abstände hat. Setzen wir also die beiden Distanzquadrate (§ 5) einander gleich, so ist

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2$$

die Gleichung der Ebene, die sich aber mit den Abkürzungen r', r'' für die Vectoren schreiben lässt

$$(x'-x'')\,x+(y'-y'')\,y+(z'-z'')\,z-\tfrac{1}{2}\,(r'^2-r''^2)=0.$$

Wirklich müssen, wie die Vergleichung zeigt, die Coordinatendifferenzen den Richtungscosinus von $P'P''$ proportional sein.

§ 20. Die allgemeine Gleichung ersten Grades hängt eigentlich nur von drei Bestimmungsstücken ab. Die vier Coefficienten der Gleichung dürfen ja proportional geändert werden, so dass irgend einer derselben, der von Null verschieden ist, durch Division einen vorgeschriebenen Wert erhalten kann, z. B. Eins.

So können wir durch Division durch $-D$ und mit den Abkürzungen

$$-\frac{D}{A}=\frac{n}{\cos\alpha}=h,\quad -\frac{D}{B}=\frac{n}{\cos\beta}=k,\quad -\frac{D}{C}=\frac{n}{\cos\gamma}=l$$

die symmetrische Gleichung der Ebene herstellen (vgl. **A.** § 28)

$$\frac{x}{h}+\frac{y}{k}+\frac{z}{l}=1.$$

In derselben bedeuten h, k, l die Abschnitte OH, OK, OL der Ebene in der x, y, z-Axe (Fig. § 12). Denn um die Abscisse des Schnittpunktes mit der x-Axe zu finden, haben wir $y=0$ und $z=0$ zu setzen und erhalten $x=h=-D:A$, u. s. w. Diese Gleichungsform gilt also für beliebige Ebenen, welche nicht durch den Nullpunkt gehen, daher durch drei Axenschnittpunkte festgelegt werden können.

§ 21. Die Vergleichung der allgemeinen mit der normalen und der symmetrischen Form zeigt deutlich, dass A, B, C, D nicht als gleichartige Zahlen aufzufassen sind, sondern entweder A, B, C als reine Zahlen und D als Längenzahl oder A, B, C als die Reciproken von Längen und D als reine Zahl.

Bei besonderen Lagen der Ebene haben einzelne Coefficienten Nullwerte, d. h. einzelne Glieder in der allgemeinen Gleichung fehlen. So erfordert die Lage des Nullpunkts in der Ebene, dass der Gleichung das constante Glied fehle, $D=0$, denn nur dann kann die Gleichung für $x=y=z=0$ befriedigt werden. Jede Gleichung $Ax+By+Cz=0$ stellt eine Vectorebene dar.

Eine Gleichung $Ax+By+D=0$ ohne das Glied mit z, also mit $C=0$, stellt eine zur xy-Ebene normale Ebene dar, denn es ist $\gamma=90$. Analog sind $Ax+Cz+D=0$ und $By+Cz+D=0$ zu erläutern. Endlich sind $Ax+D=0$, $By+D=0$, $Cz+D=0$ Normalebenen der Axen, $By+Cz=0$, $Ax+Cz=0$, $Ax+By=0$ Ebenen, welche eine Axe enthalten.

§ 22. Um eine Ebene durch auferlegte Bedingungen zu bestimmen, hat man ihre Gleichung in allgemeiner Form anzunehmen: $Ax+By+Cz+D=0$ und durch Ausdruck dieser Bedingungen Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten zu gewinnen. Wenn dieselben vom ersten Grade sind, nennt man die vorgeschriebenen Bedingungen linear.

Die häufigste lineare Bedingung besteht darin, dass die Ebene durch einen gegebenen Punkt $x_1 \mid y_1 \mid z_1$ gehe, also $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ sei.

Durch Elimination von D ergibt sich daher, dass eine durch einen gegebenen Punkt gehende Ebene die Gleichung hat

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

$$\text{oder } (x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\cos\beta+(z-z_1)\cos\gamma=0.$$

Linear ist ferner die Bedingung, dass die Ebene zu einer gegebenen Ebene $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ normal oder zu einer gegebenen Geraden von den Axenwinkeln α_1, β_1, γ_1 parallel sei. Denn in beiden Fällen muss für die Normale α, β, γ der gesuchten Ebene die Orthogonalitätsbedingung erfüllt sein

$$\cos\alpha_1\cos\alpha+\cos\beta_1\cos\beta+\cos\gamma_1\cos\gamma=0, \text{ also}$$

$$A_1A+B_1B+C_1C=0 \text{ oder } A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1=0.$$

§ 23. Dagegen zählt die Vorschrift, zu einer Ebene parallel oder zu einer Geraden normal zu sein, für zwei lineare Bedingungen. Denn in beiden Fällen muss die Normale der verlangten Ebene und die der gegebenen oder die gegebene Gerade parallel sein. Die betreffenden Bedingungen $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$ zählen jedoch nur für zwei unabhängige Gleichungen. Also ist die Bedingung für den Parallelismus zweier Ebenen

$$A:A_1=B:B_1=C:C_1.$$

Die Gleichungen paralleler Ebenen können so geschrieben werden, dass sie sich nur im constanten Gliede unterscheiden:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_1x+B_1y+C_1z+D=0.$$

Und eine Ebene ist zu einer Geraden normal, wenn die Coefficienten ihrer Gleichung zu deren Richtungscosinus proportional sind. Nicht linear sind die Bedingungen, eine Ebene in vorgeschriebenem Abstand von einem gegebenen Punkte oder unter vorgeschriebenem Winkel gegen eine gegebene Ebene oder Gerade zu legen etc.

§ 24. Daher ist die Ebene durch drei lineare Bedingungen, die sich nicht widersprechen, eindeutig festgelegt. So ist z. B. die Parallelebene zur Ebene $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, die durch den Punkt $x_1 \mid y_1 \mid z_1$ geht, $A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)$ und die durch denselben Punkt gelegte Normalebene zur Richtung α, β, γ

$$(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\cos\beta+(z-z_1)\cos\gamma=0.$$

Die Ebene ist durch drei Punkte bestimmt, welche nicht in einer Geraden liegen. Sind deren Coordinaten $x_1 \mid y_1 \mid z_1$, $x_2 \mid y_2 \mid z_2$, $x_3 \mid y_3 \mid z_3$, so sind die Coefficienten der allgemeinen Gleichung $Ax+By+Cz+D=0$ dadurch zu ermitteln, dass die Gleichung befriedigt sein soll, wenn man der Reihe nach zusammengehörige Coordinaten einsetzt. Man erhält so drei Gleichungen $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ etc., aus welchen die Verhältnisse $A:D$, $B:D$, $C:D$ als Unbekannte berechnet werden können. Man kann die Lösungen schreiben

$$A=(y_2z_3-y_3z_2)+(y_3z_1-y_1z_3)+(y_1z_2-y_2z_1),$$
$$B=(z_2x_3-z_3x_2)+(z_3x_1-z_1x_3)+(z_1x_2-z_2x_1),$$
$$C=(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)+(x_1y_2-x_2y_1),$$
$$D=(y_2z_3-y_3z_2)x_1+(y_3z_1-y_1z_3)x_2+(y_1z_2-y_2z_1)x_3,$$

und hat nur diese Werte einzusetzen. Man beachte dabei die einfachen cyclischen Bildungsgesetze dieser Ausdrücke (vgl. § 16). Hiernach sind die Coefficienten A, B, C einfach die doppelten Flächeninhalte der Projectionen des gegebenen Dreiecks auf die yz-, zx-, xy-Ebene.

6

§ 25*. Die Fläche Δ des Dreiecks ABC ergibt sich durch die Bemerkung, dass die Fläche der Projection gleich dem Producte der eigentlichen Fläche in den Cosinus des Neigungswinkels ist. Denn die durch die Ecken gelegten Normalebenen zur Schnittlinie der Ebene mit der xy-Ebene schneiden Gerade von der Neigung γ heraus (z. B. LN in Fig. § 12), welche mit den Dreiecksseiten Trapeze begrenzen, deren Inhalte sich zu den Inhalten der Projectionen verhalten, wie $1 : \cos\gamma$.

Also ist $A = 2\Delta\cos\alpha$, $B = 2\Delta\cos\beta$, $C = 2\Delta\cos\gamma$ und also

$$2\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Daher ist nun auch das constante Glied D zu deuten als das sechsfache Volumen des vom Nullpunkt und den gegebenen Punkten gebildeten Tetraeders. Denn dieses sechsfache Volumen ist gleich dem doppelten Producte aus Grundfläche und Höhen (§ 18),

$$6\,V = 2\Delta\,.\,n = 2\Delta\,.\,\frac{D}{2\Delta} = D.$$

Ebenso lassen sich Ax, By, Cz in drei ähnliche Ausdrücke ordnen, welche die sechsfachen Volumina der Tetraeder angeben, welche vom Nullpunkte, zweien der gegebenen und dem beweglichen Punkte $x\,|\,y\,|\,z$ eingeschlossen sind. Berücksichtigt man die Vorzeichen dieser Volumina, so ergibt sich, dass die linke Seite der Gleichung überhaupt das sechsfache Volumen des von drei gegebenen und einem vierten beweglichen Punkte gebildeten Tetraeders ausdrückt. Daher sagt die Gleichung der durch drei Punkte bestimmten Ebene aus, dass ihr beweglicher Punkt mit den gegebenen ein Tetraeder vom Volumen Null bestimme.

Bei Anwendung obiger Abkürzungen heisst $Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0$ die Bedingung dafür, dass vier gegebene Punkte in einer Ebene liegen.

§ 26. Die Gerade ist bestimmt entweder durch zwei Punkte als Verbindungsgerade, insbesondere durch einen Punkt und die Richtung, oder durch zwei Ebenen, die nicht parallel sind, als Schnittgerade.

Sämtliche Punkte der Verbindungsgeraden von $x_1\,|\,y_1\,|\,z_1$ und $x_2\,|\,y_2\,|\,z_2$ werden erhalten, indem man in den Formeln des § 9 $(1 + \lambda)\,x = x_1 + \lambda\,x_2$ etc. dem Teilverhältnis λ alle möglichen reellen Werte beilegt. Sämtliche Punkte der durch $x_0\,|\,y_0\,|\,z_0$ gehenden Geraden von der Richtung α, β, γ werden erhalten, indem man in den Formeln

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma} = d$$

der Entfernung d alle möglichen Werte gibt. Dieselbe Gerade kann durch andere Wahl der gegebenen Punkte sehr verschiedenartig dargestellt werden.

Um den Schnittpunkt einer solchen Geraden mit einer gegebenen Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ zu bestimmen, hat man nur mittelst dieser Formeln die laufenden Coordinaten zu eliminiren

$$(A\,x_1 + B\,y_1 + C\,z_1 + D) + \lambda\,(A\,x_2 + B\,y_2 + C\,z_2 + D) = 0 \text{ oder}$$

$$(A\,x_1 + B\,y_1 + C\,z_1 + D) + d\,(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) = 0$$

und aus diesen Gleichungen die Unbekannte λ oder d zu berechnen.

Anderseits schneiden sich zwei Ebenen von den Gleichungen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

wenn nicht $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$ ist (§ 23), in einer Geraden s. Daher gehören alle Punkte, deren Coordinaten beide Gleichungen gleichzeitig befriedigen, dieser Schnittgeraden s an.

§ 27. Aber durch dieselbe Gerade s gehen unzählig viele Ebenen, deren Gesamtheit das Ebenenbüschel von der Kante s heisst. Die Gleichung irgend einer dieser Ebenen wird erhalten, indem man die beiden gegebenen Gleichungen, d. h. die mit irgend welchen Factoren versehenen linken Seiten, combinirt (wie in **A.** § 40). Wenn mit μ eine beliebige Zahl, mit E_1 und E_2 die linken Seiten zweier allgemeiner Gleichungen ersten Grades abkürzend bezeichnet werden, so ist

$$E_1 - \mu E_2 = 0$$

die Gleichung einer beliebigen durch die Schnittgerade s gehenden Ebene. Denn diese Gleichung ersten Grades stellt eine Ebene dar, welche jeden Punkt der Geraden s enthält, weil sie erfüllt ist, sobald gleichzeitig $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ es sind.

Umgekehrt kann jede Ebene, die durch s geht, so dargestellt werden, denn sie ist durch Angabe eines nicht in s liegenden Punktes $x_0 \mid y_0 \mid z_0$ bestimmt. Zugleich ist dies aber eine lineare Bedingung für die Coefficienten der Gleichung, aus welcher der specielle Wert von μ zu berechnen ist als

$$\mu = \frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1}{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2}.$$

Wird dieser Wert von μ eingesetzt, so bedeutet die combinirte Gleichung die durch den Punkt $x_0 \mid y_0 \mid z_0$ und s bestimmte Ebene.

§ 28. Bedeuten $E'_1 = 0$, $E'_2 = 0$ die Normalgleichungen der beiden Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, so ist die Ebene $E_1 - \mu E_2 = 0$ des Büschels auch durch $E'_1 - \mu' E'_2 = 0$ dargestellt, wenn $\mu' \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = \mu \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$ ist. Die geometrische Bedeutung der Unbestimmten μ' ist leicht angebbar.

Denn, da für jeden Punkt der Ebene stets $E'_1 : E'_2 = \mu'$ ist, E'_1 und E'_2 aber die normalen Abstände dieses Punktes von den Ebenen $E'_1 = 0$ und $E'_2 = 0$ bedeuten, so ist die Ebene $E'_1 - \mu' E'_2 = 0$ der Ort des Punktes, dessen Abstände von den gegebenen Ebenen das feste Verhältnis μ' haben. Dabei sind die Vorzeichen dieser Abstände berücksichtigt, so dass die Ebene bei positivem μ' durch den Winkelraum geht, welcher den Nullpunkt enthält, bei negativem μ' durch den Nebenwinkelraum.

Das Abstandsverhältnis ist aber offenbar gleich dem Verhältnis der Sinus der von je einer gegebenen Ebene und dem Orte eingeschlossenen Winkel. Man sagt daher, die Ortsebene teile den Winkel der beiden Ebenen im Sinusteilverhältnis μ' (vgl. **A.** § 39). Zwei Ebenen mit entgegengesetzt gleichem Sinusteilverhältnis $\pm \mu'$ sind wieder als harmonisch in Bezug auf die gegebenen Ebenen zu bezeichnen. Denn die beiden Ebenenpaare $E'_1 = 0$, $E'_2 = 0$ und $E'_1 - \mu' E'_2 = 0$, $E'_1 + \mu' E'_2 = 0$ schneiden jede zu s nicht parallele Gerade in harmonischen Punktepaaren. Es genügt dies für die x-Axe nachzuweisen, da sie allgemeine

Lage gegen s hat. Setzen wir aber in obigen Gleichungen $y = 0$, $z = 0$, so bleiben Gleichungen für x allein:

$$x = \frac{p_1}{\cos \alpha_1},\ x = \frac{p_2}{\cos \alpha_2};\ x = \frac{p_1 - \mu' p_2}{\cos \alpha_1 - \mu' \cos \alpha_2},\ x = \frac{p_1 + \mu' p_2}{\cos \alpha_1 + \mu' \cos \alpha_2},$$

welche Abscissen harmonischer Punktepaare sind (**A.** § 5).

Insbesondere sind die beiden den Ebenenwinkel halbirenden Ebenen die Örter für Punkte gleicher Abstände von den gegebenen Ebenen, haben also die Gleichungen

$$E'_1 \mp E'_2 = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \mp \frac{A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0.$$

§ 29. Unter den Ebenen eines Büschels s gibt es stets eine, welche zu einer gegebenen Ebene normal ist, da diese Bedingung linear ist (§ 21), also eine Gleichung ersten Grades zur Bestimmung von μ liefert. Insbesondere gehen durch die Gerade s von den Gleichungen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ drei Ebenen, welche zu je einer Coordinatenebene normal sind. Um ihre Gleichungen zu bekommen, hat man nur μ einen solchen Wert beizulegen, dass in $E_1 - \mu E_2$ der Coefficient von x, y oder z Null wird. Diese Werte sind der Reihe nach $\mu = A_1 : A_2$, $\mu = B_1 : B_2$, $\mu = C_1 : C_2$. Endlich gibt der Wert $\mu = D_1 : D_2$ die Gleichung der Vectorebene, welche dem Büschel s angehört.

Da diese Gleichungen $A_2 E_1 - A_1 E_2 = 0$, $B_2 E_1 - B_1 E_2 = 0$, $C_2 E_1 - C_1 E_2 = 0$, $D_2 E_1 - D_1 E_2 = 0$ nur drei Glieder enthalten, so wird man mit Vorteil zwei derselben zur Darstellung der Geraden s benutzen. So kann jede Gerade s, die nicht zur x-Axe normal ist, erhalten werden als Schnittgerade einer zur xy-Ebene und einer zur zx-Ebene normalen Ebene. Ihre Gleichungen können also geschrieben werden

$$y = ax + b,\ z = cx + d.$$

Dies sind zugleich auch die Gleichungen der Projectionen der Geraden auf die xy- und zx-Ebene, und zwar sind a und c die Richtungszahlen dieser Projectionen, d. h. die Tangenten ihrer Neigungswinkel gegen die x-Axe. Zu beachten ist, dass in dieser Form zwei Coordinaten (y, z) der Punkte der Geraden s mittelst der dritten (x), die willkürliche Werte annehmen kann, ausgedrückt sind.

Die obigen Gleichungen genügen nicht, wenn sie identisch sind, und dies tritt ein, wenn die Gerade zur x-Axe normal, also in einer Ebene $x = x_0$ enthalten ist. Dann kann man aber noch die dritte Projection benutzen. Jede Gerade kann also durch ihre normalen Projectionen auf zwei der Coordinatenebenen definirt werden, analytisch also durch zwei dreigliedrige Gleichungen. Für Vectorlinien sind die Gleichungen noch einfacher $y = ax$, $z = cx$.

§ 30. Ist die Gerade s durch zwei Gleichungen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ gegeben, so sind ihre Axenwinkel oder Richtungscosinus zu bestimmen. Dazu dient natürlich die parallele Vectorgerade, welche durch $A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0$ dargestellt ist. Nun sind aber die drei Coordinaten der Punkte einer Vectorgeraden ihren Richtungscosinus proportional, daher zu deren Berechnung die Gleichungen dienen werden

$$A_1 \cos \alpha + B_1 \cos \beta + C_1 \cos \gamma = 0,\ A_2 \cos \alpha + B_2 \cos \beta + C_2 \cos \gamma = 0.$$

Und zwar findet man

$N\cos\alpha = B_1 C_2 - B_2 C_1$, $N\cos\beta = C_1 A_2 - C_2 A_1$, $N\cos\gamma = A_1 B_2 - A_2 B_1$,

wo der Factor N mittelst Quadriren und Addiren folgt:

$$N^2 = (B_1 C_2 - B_2 C_1)^2 + (C_1 A_2 - C_2 A_1)^2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2.$$

In diesen Formeln dürfen auch die Coefficienten durch die Richtungscosinus $\cos\alpha_1 \ldots, \cos\alpha_1 \ldots$, der Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ ersetzt werden. In dieser Schreibweise lösen sie dann zugleich die Aufgabe, die Ebene von den Neigungswinkeln α, β, γ zu bestimmen, welche zu zwei Geraden α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 parallel ist. Denn die Normale der Ebene ist Schnittlinie zweier Normalebenen der Geraden.

Sind dagegen für s die Projectionsgleichungen gegeben $y = ax + b$, $z = cx + d$, so sind die der parallelen Vectorgeraden $y = ax$, $z = cx$ und die Auflösungsformeln lauten einfacher

$$\cos\alpha = \frac{1,}{\sqrt{1+a^2+c^2}}, \cos\beta = \frac{a,}{\sqrt{1+a^2+c^2}}, \cos\gamma = \frac{c.}{\sqrt{1+a^2+c^2}}.$$

Ferner ist nach der zweiten Auffassung dieser Formeln

$$x + ay + cz + e = 0$$

die Gleichung einer zu beiden Geraden parallelen Ebene.

§ 31. Diese Berechnung der Axenwinkel zeigt, dass allgemein die Projectionsgleichungen einer Geraden aus den je λ oder d enthaltenden Formeln für die Coordinaten ihrer Punkte (§ 26) durch Elimination dieser Unbestimmten aus zweien der Formeln ableitbar ist. So gibt die symmetrische Darstellung des § 26 unmittelbar die Projectionsgleichungen einer durch den Punkt $x_0 \mid y_0 \mid z_0$ gehenden Parallelen zur Vectorgeraden α, β, γ zusammengezogen in

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}.$$

So sind die Gleichungen der vom Punkte $x_0 \mid y_0 \mid z_0$ auf die Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ gefällten Normalen

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$

da A, B, C den Richtungscosinus derselben proportional sind.

Ebenso findet man die Projectionsgleichungen der Verbindungsgeraden zweier Punkte $x_1 \mid y_1 \mid z_1$ und $x_2 \mid y_2 \mid z_2$, indem man das Teilverhältnis λ aus je zwei Formeln des § 9 eliminirt. Man gelangt dadurch zu den symmetrischen Gleichungen der Verbindungsgeraden:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Diese symmetrischen Gleichungsreihen für die Gerade sind sehr zu bevorzugen, weil sie alle Geraden ohne Ausnahme umfassen, nämlich drei Projectionsgleichungen vertreten (vgl. § 29). So sind auch die symmetrischen Gleichungen einer Vectorlinie $x : x_1 = y : y_1 = z : z_1$.

§ 32. Der Schnittpunkt einer Geraden $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ mit einer Ebene $E_3 = 0$ wird erhalten als Schnittpunkt der drei Ebenen. Aus den drei Gleichungen ersten Grades können im allgemeinen für

die drei Unbekannten bestimmte, endliche Werte gefunden werden, als Coordinaten des Schnittpunktes (vgl. **A.** § 34).

Diese Auflösungen haben denselben Nenner, also werden die Coordinaten unendlich gross, wenn derselbe den Wert Null erhält. Somit ist

$$A_1 (B_2 C_3 - B_3 C_2) + A_2 (B_3 C_1 - B_1 C_3) + A_3 (B_1 C_2 - B_2 C_1) = 0$$

die Bedingung dafür, dass die drei Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ parallele Schnittlinien haben.

Unzählig viele Auflösungen sind, sofern die Gleichungen überhaupt unter einander verschieden sind, nur möglich, wenn eine Gleichung eine Combination der beiden andern ist (§ 27).

§ 33. Die Gleichung jeder Ebene, welche durch den Schnittpunkt der Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ geht, muss also erhalten werden können in der Form

$$E_1 + \mu E_2 + \nu E_3 = 0,$$

wo μ und ν verfügbare Unbestimmte sind. Denn diese Gleichung ist für die Coordinaten erfüllt, welche gleichzeitig die drei gegebenen Gleichungen befriedigen. Die Gesamtheit der Ebenen durch einen Punkt heisst ein Ebenenbündel, die Gesamtheit ihrer Schnittgeraden ein Strahlenbündel. Ein Bündel enthält noch unzählig viele Büschel, denn jede lineare Bedingung macht ν von μ in bestimmter Weise abhängig.

Es ist nur ein specieller Fall dieser Überlegung, wenn die Gleichung einer durch den Punkt $x_0 | y_0 | z_0$ gehenden Ebene geschrieben wird wie in § 22. Denn in diesem Falle sind nur $E_1 = x - x_0$, $E_2 = y - y_0$, $E_3 = z - z_0$, die drei gegebenen Ebenen also Normalebenen der Axen.

§ 34. Endlich haben vier Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ im allgemeinen keinen gemeinsamen Punkt. Ihre Gleichungen haben eine Gruppe gemeinsamer Lösungen nur dann, wenn eine der Gleichungen eine blosse Combination der drei andern ist. Hiervon hängt also auch die Entscheidung darüber ab, ob zwei Gerade windschief sind oder nicht.

Haben die Geraden die Projectionsgleichungen

$$y = ax + b,\ z = cx + d;\ y = a'x + b',\ z = c'x + d',$$

so genügen die Coordinaten eines allfällig vorhandenen Schnittpunktes auch den als Differenzen erhaltenen Gleichungen

$$(a - a')x + (b - b') = 0,\ (c - c')x + (d - d') = 0.$$

Diese aber haben nur dann eine gemeinsame Lösung, wenn zwischen den Coefficienten die Relation besteht

$$(b - b')(c - c') = (a - a')(d - d').$$

Dies ist die Bedingung, damit die beiden Geraden sich schneiden. Wird sie nicht erfüllt, so sind die Geraden windschief, denn parallel sind sie nur, wenn $a = a'$, $c = c'$ ist, die Bedingung also ebenfalls befriedigt wird.

III. Die Kugel.

§ 35. Die Kugel ist der Ort eines Punktes, welcher von einem festen Punkte M, dem Mittelpunkte, constanten Abstand gleich dem Radius r hat. Somit genügen die Coordinaten eines jeden Punktes der Kugelfläche der Gleichung, welche ausdrückt, dass die Entfernung zwischen $x \mid y \mid z$ und $a \mid b \mid c$ gleich r ist,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0.$$

Dies ist die Normalgleichung der Kugel.

Dieselbe folgt auch durch Verschiebungstransformation aus der Gleichung der um den Nullpunkt ($a=0, b=0, c=0$) beschriebenen Kugel

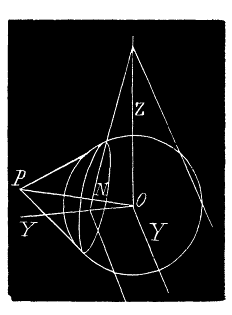
$$x^2+y^2+z^2-r^2=0,$$

welche die Definition des Vectors r des Punktes $x \mid y \mid z$ ist (§ 5). So lange r constant ist, drücken daher $x=r\cos\alpha$, $y=r\cos\beta$, $z=r\cos\gamma$ die Coordinaten eines beliebigen Kugelpunktes aus, dessen Radius die Axenwinkel α, β, γ macht (§ 8). Zur Untersuchung der Eigenschaften nur einer Kugel genügt diese specielle Lage, da alle Resultate durch Verschiebungstransformation die allgemeinste Form erhalten.

§ 36. Die Discussion der Gleichung $x^2+y^2+z^2=r^2$ ergibt folgendes. Ob $x \mid y \mid z$ der Gleichung genügt, ist von den Vorzeichen unabhängig. Die Kugel ist daher symmetrisch in Bezug auf jede Coordinatenebene, jede Axe und den Mittelpunkt. Auflösung nach $z=\pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ zeigt, dass nur die Punkte innerhalb der Kreisfläche $x^2+y^2=r^2$ erste Projectionen von Kugelpunkten sind und zwar von je zwei symmetrischen. Der Kreis selbst ist die Schnittlinie der Kugel mit der xy-Ebene, da seine Gleichung aus der Kugelgleichung für $z=0$ entsteht. Die Kugel liegt ganz innerhalb des durch jenen Kreis gehenden, zur z-Axe parallelen Cylinders. Die Kreise $y^2+z^2=r^2$, $z^2+x^2=r^2$ in den andern Coordinatenebenen haben analoge Bedeutung.

Überhaupt geht durch eine beliebige Drehungstransformation die Quadratsumme $x^2+y^2+z^2$ der ursprünglichen Coordinaten in die Quadratsumme $x'^2+y'^2+z'^2$ der neuen über (vgl. **A.** § 14), d. h. die Normalgleichung der Kugel behält dieselbe Form. Daher schneidet jede durch den Mittelpunkt gelegte Ebene in einem Kreise vom Radius r, einem Hauptkreise der Kugel. Die Kugel ist in Bezug auf jede Hauptkreisebene und jeden Durchmesser symmetrisch.

§ 37. Um den Querschnitt einer Ebene mit der Kugel $x^2+y^2+z^2=r^2$ zu untersuchen, denken wir den zur Ebene normalen Durchmesser als z-Axe genommen, nehmen also die Gleichung der Ebene als $z=n$. Durch Einsetzung ergibt sich



$$x^2+y^2=r^2-n^2.$$

Dies ist, so lange $n<r$ ist, die Gleichung eines Cylinders, welcher die xy-Ebene und die Ebene $z=n$ in congruenten Kreisen schneidet. Somit schneidet jede Ebene im Abstande $n<r$

vom Mittelpunkt die Kugel vom Radius r in einem Kreise vom Radius $\sqrt{(r^2-n^2)}$. Die Hauptkreise sind die grössten Kugelkreise, da für sie $n=0$ ist. Dagegen hat eine Ebene vom Abstande r nur den Fusspunkt derselben mit der Kugel gemein, dargestellt als Nullkreis $x^2+y^2=0$.

Ohne Transformation ergibt sich dasselbe folgendermassen. Sei die Ebene durch die Normalgleichung $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=n$ (§ 18) gegeben und setzen wir ein $x=r\cos\alpha'$, $y=r\cos\beta'$, $z=r\cos\gamma'$, so lässt sich das Resultat nach § 11 schreiben als $r\cos\varphi=n$. Der Kugelradius eines Punktes der Schnittlinie macht also mit dem zur Ebene normalen Durchmesser einen constanten Winkel φ; der Punkt hat vom Fusspunkte des letzteren somit die constante Entfernung $r\sin\varphi=\sqrt{(r^2-n^2)}$.

§ 38*. Der Kreis wird in der Raumgeometrie am zweckmässigsten als Kugelkreis betrachtet, d. h. durch die Gleichungen einer Kugel und einer Ebene zusammen dargestellt

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=n.$$

Die Projection des Kreises auf die xy-Ebene erhalten wir, indem wir aus obigen beiden Gleichungen die Veränderliche z eliminiren. Die entstehende Gleichung zwischen x und y gibt nämlich diejenigen Punkte der xy-Ebene, zu welchen die gegebenen Gleichungen je denselben Wert von z liefern, d. h. einen Punkt des Schnittkreises. Nehmen wir die Kugel in der speciellen Lage $x^2+y^2+z^2=r^2$ an, so kann noch ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit die Ebene normal zur yz-Ebene als $y\cos\beta+z\cos\gamma=n$ vorausgesetzt werden. Dann gibt die Elimination

$$(x^2+y^2-r^2)\cos^2\gamma+(y\cos\beta-n)^2=0.$$

Dasselbe kann wegen $\cos^2\gamma=\sin^2\beta$ leicht in die Form gebracht werden

$$x^2\sin^2\beta+(y-n\cos\beta)^2=(r^2-n^2)\sin^2\beta.$$

Hieraus geht hervor, dass die Projection des Kreises eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt die Projection $0\,|\,n\cos\beta\,|\,0$ des Kreiscentrums und deren Hauptaxe $2\sqrt{(r^2-n^2)}$ zur Ebene parallel ist.

§ 39. Eine Ebene, welche mit der Kugel einen Nullkreis, (d. h. nur einen Punkt P) gemein hat, heisst Berührungs- oder Tangentialebene der Kugel in diesem Berührungspunkt. Macht der Radius desselben die Axenwinkel α, β, γ, so ist die Normalgleichung der Berührungsebene

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-r=0.$$

Durch Multiplikation mit r geht sie über in die allgemeine Gleichung der im Punkte $x_1\,|\,y_1\,|\,z_1$ berührenden Ebene

$$x_1x+y_1y+z_1z-r^2=0.$$

Hätte diese Ebene mit der Kugel einen von $x_1\,|\,y_1\,|\,z_1$ verschiedenen Punkt $x'\,|\,y'\,|\,z'$ gemein, so wären, ausser $x_1^2+y_1^2+z_1^2=r^2$, erfüllt $x'^2+y'^2+z'^2=r^2$ und $x_1x'+y_1y'+z_1z'=r^2$. Subtrahiren wir das Doppelte letzterer Gleichung von der Summe der beiden ersten, so lässt sich das Resultat schreiben

$$(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2+(z'-z_1)^2=0.$$

Auch diese Gleichung müsste reell befriedigt sein, während sie es nur ist für $x'=x_1$, $y'-y_1$, $z'=z_1$. Man nennt dies die Gleichung eines Punktes P als Nullkugel $(r=0)$ (vgl. **A.** § 44).

§ 40. Liegt der Punkt $x_1 | y_1 | z_1$ nicht auf der Kugel, so ist die Ebene von der Gleichung $x_1 x + y_1 y + z_1 z = r^2$ dennoch von ihm abhängig. Sie heisst seine Polarebene in Bezug auf die Kugel und hat folgende Eigenschaften. Sie ist normal zu dem $x_1 | y_1 | z_1$ enthaltenden Durchmesser $x : x_1 = y : y_1 = z : z_1 = d$ (§ 31). Für den Schnittpunkt der Polarebene mit demselben ergibt sich durch Einsetzung ein solcher Vector $r'_1 = d\, r_1$, dass $d\,(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = d\, r_1^2 = r_1 r'_1$ ist. Somit sind der Pol und der Schnittpunkt seines Durchmessers mit seiner Polarebene harmonisch getrennt durch die Endpunkte derselben in der Kugel (vgl. **A.** § 51).

Die Polarebene schneidet die Kugel oder schneidet sie nicht, je nachdem der Pol ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt, denn für $r_1 \gtrless r$ ist $r'_1 \lesseqgtr r$. Die Polarebene eines auf der Kugel gelegenen Punktes ist die in ihm berührende Ebene. Die Polarebene eines unendlich fernen Punktes ist die zu seiner Richtung normale Hauptkreisebene.

§ 41. Wenn zwei Punkte $x_1 | y_1 | z_1$ und $x_2 | y_2 | z_2$ so liegen, dass

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r^2$$

ist, so geht die Polarebene des einen durch den andern. Also gehen die Polarebenen aller Punkte einer gegebenen Ebene durch den Pol derselben und umgekehrt. So gehen die Polarebenen der Punkte einer Berührungsebene durch den Berührungspunkt.

Ferner gehen die Polarebenen aller Punkte einer Geraden durch eine zweite Gerade. Direct findet man, dass, wenn erstere die Verbindungsgerade der Punkte $x' | y' | z'$, $x'' | y'' | z''$ ist, die letztere die Schnittgerade $x' x + y' y + z' z = r^2$, $x'' x + y'' y + z'' z = r^2$ ist und die Gleichung der Polarebene des jene Strecke im Verhältnis λ teilenden Punktes geschrieben werden kann

$$(x' x + y' y + z' z - r^2) + \lambda\,(x'' x + y'' y + z'' z - r^2) = 0.$$

Man nennt solche Gerade, dass den Punkten der einen Polarebenen durch die andere entsprechen, conjugirte Polaren. Sie sind zu einander normal, aber im allgemeinen windschief, schneiden nämlich den zu beiden normalen Durchmesser in durch die Kugel harmonisch getrennten Punkten. Entweder schneidet nur eine von ihnen die Kugel oder beide liegen in einer Berührungsebene und gehen dann durch den Berührungspunkt als Tangenten der Kugel.

§ 42. Eine Gerade schneidet die Kugel in zwei Punkten, in einem doppelt zählenden Punkte oder gar nicht, je nachdem ihr Abstand vom Centrum kleiner, gleich oder grösser wie r ist. Denn dies gibt ihr Verhalten zum Hauptkreise in der durch sie gelegten Hauptkreisebene an.

Auf allen durch einen Punkt P gehenden Geraden ist derselbe vom Schnittpunkt mit der Polarebene von P durch die Kugel harmonisch getrennt. Denn einem Punkte $x' | y' | 0$ der xy-Ebene entspricht die Polarebene $x' x + y' y = r^2$, deren Schnittgerade mit der xy-Ebene die Polare des Punktes in Bezug auf den Hauptkreis $x^2 + y^2 = r^2$ ist.

Liegt der Punkt also ausserhalb der Kugel, so gehen von ihm an jeden Hauptkreis, dessen Ebene ihn enthält, zwei Tangenten, deren Berührungspunkte auf seiner Polarebene liegen. Die Gesamtheit dieser Kugeltangenten aus einem Punkte bilden den Berührungskegel

desselben. Auch alle durch den Punkt gehenden Berührungsebenen der Kugel haben ihre Berührungspunkte auf dieser Polarebene derselben.

Endlich gehen durch eine nicht schneidende Gerade zwei Berührungsebenen der Kugel, deren Berührungspunkte die Schnittpunkte derselben mit der conjugirten Polaren sind.

§ 43. Auf allen Secanten, die durch einen Punkt $x_1 \mid y_1 \mid z_1$ gehen, haben die von ihm bis zu den beiden Schnittpunkten mit der Kugel gemessenen Strecken ein constantes Product, welches die Potenz $\mathfrak{P}$ des Punktes in Bezug auf die Kugel heisst (vgl. **A.** § 50). Für die Gerade von der Richtung α, β, γ ergeben sich die Schnittpunkte, wenn man nach Einsetzung von $x_1 + d \cos \alpha$ etc. in die Kugelgleichung die Wurzeln d', d'' der Gleichung

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 + 2\,d\,(x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma) + d^2 = 0$$

berechnet. Das Product $d'\,d''$ dieser Wurzeln ist gleich dem constanten Gliede, also wird die Potenz

$$\mathfrak{P} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2$$

erhalten, indem man die Coordinaten des Punktes in die linke Seite der Normalgleichung einsetzt. Die Potenz ist positiv für äussere, negativ für innere Punkte.

Auf einer Tangente vereinigen sich die Schnittpunkte im Berührungspunkt. Also ist die Länge jeder Tangente gleich der Quadratwurzel aus der Potenz ihres Endpunktes, $t = \sqrt{\mathfrak{P}}$.

§ 44. Zur Untersuchung der Beziehungen zweier Kugeln genügt es, infolge der Symmetrie beider Kugeln in Bezug auf die gemeinsame Centrale, das Verhalten der beiden Hauptkreise in einer die Centrale enthaltenden Ebene mittelst der ebenen Geometrie zu ermitteln.

Nehmen wir die Centrale als z-Axe, also die Kugelgleichungen als

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \; x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r'^2$$

an, so genügen die gemeinsamen Punkte auch ihrer Differenz

$$2\,c\,z = c^2 + r^2 - r'^2.$$

Daher schneiden sich, sobald aus c, r, r' ein Dreieck zu bilden ist, die Kugeln in dem Kreise, in welchem jede von dieser zur Centralen normalen Ebene geschnitten wird (**A.** § 57). Man spricht dann wieder vom Schnittwinkel der Kugeln, und zwar heissen die Kugeln zu einander orthogonal, wenn $c^2 = r^2 + r'^2$ ist (**A.** § 58).

§ 45. Auch, wenn die Kugeln sich nicht schneiden, existirt diese Ebene und heisst die Potenzebene der Kugeln. Denn nach der Bildung ihrer Gleichung ist sie der Ort der Punkte, welche in Bezug auf beide Kugeln gleiche Potenzen haben (**A.** § 61). Dieselben Potenzen hat ein solcher Punkt überhaupt in Bezug auf alle Kugeln, deren Gleichungen durch Combination der gegebenen erhalten werden

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 - r'^2 - \mu\,(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = 0,$$

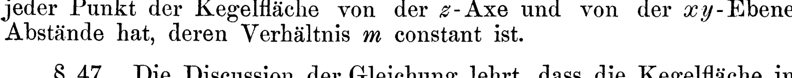
denn die linke Seite ist das $(1 - \mu)$fache der Normalform. Die Gesamtheit der Kugeln mit gemeinsamer Potenzebene heisst ein Kugelbüschel (vgl. **A.** § 64). Um jeden Punkt der Potenzebene, der ausserhalb der Kugeln liegt, kann eine zu allen Kugeln des Büschels gleichzeitig orthogonale Kugel beschrieben werden.

Drei Kugeln haben eine gemeinsame Centralebene und die Potenzebenen der aus ihnen gebildeten Paare gehen durch dieselbe zur Centralebene normale Potenzgerade der drei Kugeln (**A.** § 62). Schneiden sich die Kugeln paarweise reell, so ist die Potenzlinie die Sehne der allen gemeinsamen Schnittpunkte. Endlich besitzen vier Kugeln ein gemeinsames Potenzcentrum.

IV. Der Kreiskegel.

§ 46. Der Ort einer Geraden, welche eine gegebene Gerade a in einem festen Punkt O unter einem constanten Winkel ω schneidet, ist ein Kegel. Derselbe wird als gerader Kreiskegel mit der Axe a, dem Scheitel O und dem Kegelwinkel ω bezeichnet, die Lagen der Geraden heissen Erzeugende.

Nehmen wir als Kegelaxe die z-Axe, als Scheitel den Nullpunkt, so wird die Kegelgleichung erhalten, wenn wir die Bedingung ausdrücken, dass die nach dem beweglichen Punkte $x \mid y \mid z$ gehende Vectorgerade den Axenwinkel $\gamma = \omega$ oder $\gamma = 180 - \omega$ besitze. Da aber $r \cos \omega = z$ ist, so lautet diese Kegelgleichung



$$(x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 \omega = z^2$$

oder, wenn wir $tg\, \omega = m$ setzen, die Normalgleichung des Kegels

$$x^2 + y^2 - m^2 z^2 = 0.$$

Die Gleichung ist homogen und drückt aus, dass jeder Punkt der Kegelfläche von der z-Axe und von der xy-Ebene Abstände hat, deren Verhältnis m constant ist.

§ 47. Die Discussion der Gleichung lehrt, dass die Kegelfläche in Bezug auf die Coordinatenebenen, die -axen und den Nullpunkt symmetrisch ist. Ausserdem ist sie nur symmetrisch in Bezug auf jede durch die Kegelaxe gehende Hauptebene. Denn die Gleichung bleibt unverändert, wenn wir eine Drehungstransformation ausführen, bei welcher die z-Axe auch z'-Axe ist, somit $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ wird ($\alpha_3 = \beta_3 = 0$ in § 12).

Jeder Punkt der xy-Ebene ist die Projection von zwei Punkten $x \mid y \mid \pm z$ des Kegels. Alle Punkte eines Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ sind Projectionen von Punkten gleicher absoluter Höhe $z = \pm r : m$, also zweier congruenter Kreise, deren Ebenen zur Kegelaxe normal sind. Umgekehrt schneiden alle zur Axe normalen Ebenen $z = c$ den Kegel in Kreisen $x^2 + y^2 = m^2 c^2$. Dies rechtfertigt die Bezeichnung als gerader Kreiskegel. Diese Kreise, deren Radien mc ihren Abständen c vom Scheitel proportional wachsen, heissen Parallelkreise des Kegels.

§ 48. Zur Untersuchung der Querschnitte des Kegels mit beliebigen Ebenen E braucht man dieselben nicht in völlig allgemeiner Lage gegen das Coordinatensystem zu denken. Denn die zur Querschnittebene normale Hauptebene des Kegels ist Symmetrie-

auf beiden Seiten der Leitgeraden liegen, so gehören zu diesen Projectionen Querschnitte nur einer oder beider Mantelhälften, weil z dasselbe Vorzeichen wie $x + nc$ hat. Die Projection wird insbesondere für $m = n\sqrt{2}$ eine gleichseitige Hyperbel.

§ 57*. Nun gibt die Ordinate eines Punktes P' des Projectionskegelschnittes zugleich den Abstand $v = y$ des Punktes P des Querschnittes von der Symmetrie-Ebene an. Dagegen ist die Abscisse von P' die Projection der Entfernung u des Fusspunktes jenes Abstandes des Punktes P vom Axenschnittpunkt S der Schnittebene; also ist $x = u \sin\nu = nu : \sqrt{1 + n^2}$. Die Angabe von u und v bestimmt aber die Lage des Punktes P des Querschnittes gegenüber der Schnittgeraden mit der xz-Ebene als u-Axe und der Schnittgeraden mit der yz-Ebene als v-Axe.

In diesem Coordinatensystem ist die Gleichung des Querschnittes

$$\frac{n^2 u^2}{1+n^2} + v^2 = \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{n\,u}{\sqrt{1+n^2}} + n\,c\right)^2 \text{ oder } \frac{n^2 - m^2}{1+n^2}u^2 + v^2 - 2\frac{m^2}{\sqrt{1+n^2}}u = m^2 c^2,$$

eine Gleichung zweiten Grades. Die ebenen Querschnitte eines geraden Kreiskegels sind also Curven zweiter Ordnung (**A.** § 134).

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse oder Hyperbel, solange der Coefficient von u^2 positiv oder negativ ist, also $n > m$ oder $n < m$, wenn also auch die Projection eine Ellipse oder eine Hyperbel ist. Der Kegelschnitt ist eine Parabel, wenn $n = m$, also auch die Projection eine Parabel ist. Zur näheren Discussion ist eine Transformation anzuwenden, da der Axenschnittpunkt oder Brennpunkt noch Mittelpunkt des Kegelschnittes ist.

Der Ausnahmefall $n = 0$, $c = \infty$ erledigt sich leicht direct, indem wir statt z nun x eliminiren mittelst $x = -l$, auch Querschnitt und Projection auf die yz-Ebene congruent sind. Das Resultat ist

$$l^2 + y^2 = m^2 z^2 \text{ oder } y^2 - m^2 z^2 = l^2,$$

der Kegelschnitt also eine Hyperbel von der Excentricität $m\,\varepsilon = \sqrt{1 + m^2}$.

Kroll's Buchdruckerei, Berlin S., Sebastianstrasse 76.